سلسله انتشارات انجمن آثار ملی
۱۲۴

ترجمه

استخراج الاوتار

تألیف استاد ابوریحان بیرونی

ریاضیدان و منجم بزرگ ایران

از ۳۶۲ تا ۴۴۰ هجری قمری

برابر ۱۵۳۱ تا ۱۶۰۷ شاهنشاهی

پژوهش و نگارش
ابوالقاسم قربانی

Call No..........

Account No..........

Date...........................

J. & K. UNIVERSITY LIBRARY

This book should be returned on or before the last stamped above. An overdue charges of 6 nP. will be levied for each day. The book is kept beyond that day.

FREE GIFT
266

S.No:- 5668
L:- 4988

IQBAL LIBRARY
The University of Kashmir
Acc. No. [redacted]
Author [redacted]
Title [redacted]

IQBAL LIBRARY
The University of Kashmir
Acc. No. [redacted]
Author [redacted]
Title [redacted]

Call No.........

Date........... ....

Account No.........

J. & K. UNIVERSITY LIBRARY

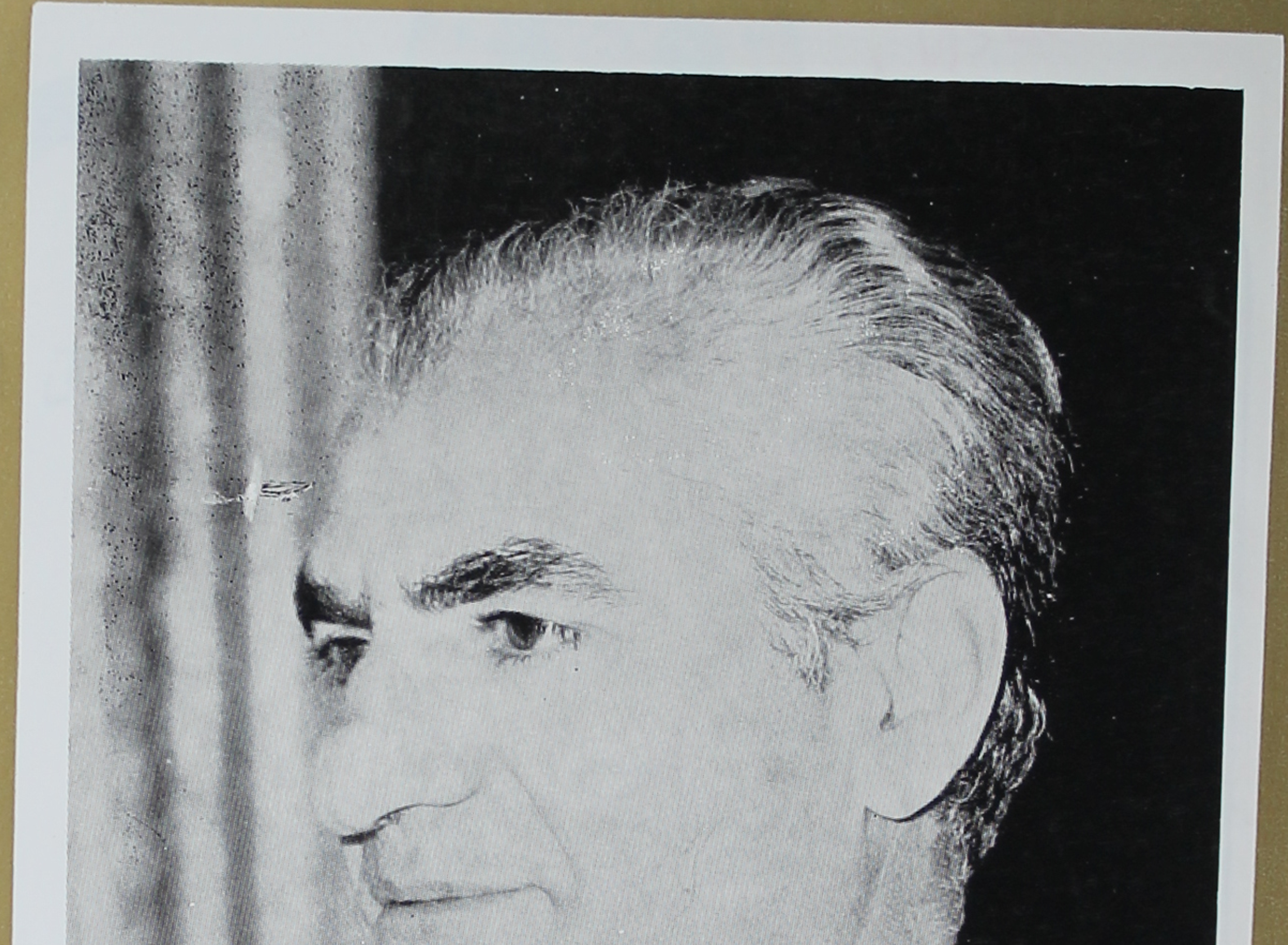
This book should be returned on or before the last stamped above. An overdue charges of 6 nP. will be levied for each day. The book is kept beyond that day.

Call No.......... Date..........................

Account No..........

J. & K. UNIVERSITY LIBRARY

This book should be returned on or before the last stamped above. An overdue charges of 6 nP. will be levied for each day. The book is kept beyond that day.



Call No.........   Date.......... ....

Account No.........

J. & K. UNIVERSITY LIBRARY

This book should be returned on or before the last stamped above. An overdue charges of 6 nP. will be levied for each day. The book is kept beyond that day.

RR
Not to be issued

سلسلهٔ انتشارات انجمن آثار ملی

۱۲۴

تحریر

استخراج الأوتار

تألیف استاد ابوریحان بیرونی

ریاضی‌دان و منجم بزرگ ایران

از ۳۶۲ تا ۴۴۰ هجری قمری

برابر ۱۵۳۱ تا ۱۶۰۷ شاهنشاهی

پژوهش و نگارش

ابوالقاسم قربانی

اهدائی
با احترامات ...
دکتر شمس الدین ...
رئیس بخش فارسی دانشگاه کشمیر
سری نگار کشمیر (هند)

KASHMIR UNIVERSITY
Iqbal Library
Acc. No 179143
Date 1-6-83

از این کتاب یك هزار نسخه درچاپخانه آذر بچاپ رسید

شماره ثبت کتابخانه ملی ۵۰۷ به تاریخ ۲۵۳۵/۳/۳۱

چهارمین نشریهٔ انجمن آثار ملی در سال ۲۵۳۵ شاهنشاهی

سال برگزاری جشن پنجاهمین سال شاهنشاهی پهلوی

Call No.......... Date.......................

Account No..........

J. & K. UNIVERSITY LIBRARY

This book should be returned on or before the last stamped above. An overdue charges of 6 nP. will be levied for each day. The book is kept beyond that day.

سرآغاز

بنام پروردگار بزرگ دانا و توانا

پس از عرض سپاس فراوان بدرگاه کبریائی آفریننده جهان و جهانیان و درود بسیار بپیامبر اسلام حضرت محمد مصطفی (ص) و دودمان گرامی او در پرتو عنایات کریمانهٔ ذات خجستهٔ اعلیحضرت همایون محمدرضا پهلوی شاهنشاه آریامهر کتاب «تحریر استخراج الاوتار» براساس یکی از مهمترین آثار ریاضی دانشمند نامی ایران ابوریحان بیرونی[1] بمعرض انتشار و استفادهٔ علاقمندان گذارده میشود.

هنگامی که بفرمان مطاع مبارک همایونی در سال ۲۵۳۲ شاهنشاهی از طرف شورای عالی فرهنگ و هنر و دانشگاههای مختلف ایران و دیگر مقامات علمی کشور نسبت به بزرگداشت نابغهٔ بزرگ علمی ایران ابوریحان بیرونی اقدامات گوناگون صورت می پذیرفت انجمن آثار ملی هم

---

(۱) تولد سوم ماه ذی حجه سال ۳۶۲ هجری (برابر ۱۵۳۱ شاهنشاهی = ۳۵۱ هجری خورشیدی و ۹۷۲ میلادی) در بیرون شهر خوارزم = درگذشت شب دوم ماه رجب سال ۴۴۰ هجری (برابر با ۱۶۰۷ شاهنشاهی = ۴۲۷ هجری خورشیدی و ۱۰۴۸ میلادی) در غزنه (= غزنین)

به پیروی از فرمان مبارک با توجه به اساسنامه و هدف همیشگی خود در راه شناساندن و بزرگداشت مفاخر و بزرگان درگذشته کشور وظائفی را بر عهده گرفت و دست بکار چاپ و انتشار کتابهائی از آن شخصیت بزرگ علمی ایران شد و تاکنون کتابهای «ترجمه یک فصل آثار الباقیه» و «بیرونی نامه» (۲) و «التفهیم لاوائل صناعة التنجیم» (نشریه های شماره ۹۸ و ۱۰۷ و ۱۰۹) (۳) را چاپ و منتشر ساخت و اینک کتاب تحریر استخراج الأوتار را که بمنزله جلد دوم بیرونی نامه است در معرض مطالعه علاقه‌مندان و دانش پژوهان می گذارد.

در مقدمه کتاب دانشمند گرامی آقای ابوالقاسم قربانی بطور شایسته درباره اهمیت علمی و نکته های دقیق متن استخراج الاوتار توضیح داده یکبار دیگر مرتبت والای نابغه بزرگ ایران را در دانش ریاضی و هندسه به معرض بررسی اهل معنی و صاحب نظران قرار داده اند و معلوم کرده اند که فرزندان این مرز و بوم با بهره مندی از وسایل موجود و فراهم بودن موجبات خدمت در روزگار کنونی چه نیکو میتوانند در راه شناخت بیشتر و بهتر فرهنگ دیرین و ریشه دار میهن خویش گام بردارند و برای دستیابی به اندیشه ها و ثمره کارهای معنوی نیاکان خود چه مایه کوشش مداوم در پیش دارند چنانکه تنها از طرف انجمن آثار ملی در ظرف سه سال نسبت به نوشته ها و آثار ابوریحان

(۲) برندهٔ جایزهٔ سلطنتی سال ۱۳۵۳ (۳) به فهرست انتشارات انجمن در پایان کتاب مراجعه فرمایند.

بیرونی چهارمین کتاب بشرحی که طی صفحات آینده از نظر خوانندگان ارجمند می گذرد انتشار می یابد و بازهم میتوان کتابهای بسیار دیگر ترتیب داد و بدین ترتیب از خرمن دانش گذشتگان همچون پشتوانه و رهنمون خدمات علمی آیندهٔ لایق چنین مرز و بوم گیتی افروز بهره مند شد.

امیدوار و آرزومند است که فرزندان برومند ایران در پی گیری اینگونه هدفهای شایستهٔ فرهنگی و ملی بفراخور دوران رستاخیز ایران توفیق روزافزون خدمت داشته باشند.

بمنه و کرمه

انجمن آثار ملی

Call No.......... Date........... ....

Account No..........

J. & K. UNIVERSITY LIBRARY

This book should be returned on or before the last stamped above. An overdue charges of 6 nP. will be levied for each day. The book is kept beyond that day.

فهرست مندرجات کتاب

صفحه

مقدمه — دو

بخش اول

کتاب استخراج الاوتار ونسخه‌های موجود آن — ۱

ضمیمهٔ بخش اول ــ عکس نسخهٔ خطی کتاب استخراج الاوتار — ۱۳

بخش دوم

مقدمهٔ کتاب استخراج الاوتار — ۵۸

بخش سوم

قضایای کتاب استخراج الاوتار

الف ــ عنوان قضیهٔ اول — ۶۳

ب ــ برهانهای قضیهٔ اول — ۶۷

ج ــ عنوان قضیهٔ دوم — ۱۱۰

د ــ برهانهای قضیهٔ دوم — ۱۱۴

ه ــ عنوان قضیهٔ سوم — ۱۴۰

و ــ برهانهای قضیهٔ سوم — ۱۴۴

ز ــ عنوان قضیهٔ چهارم — ۱۴۹

ج ــ برهانهای قضیهٔ چهارم — ۱۵۰

ط ــ تبصره‌ای دربارهٔ قضایای چهارگانهٔ مذکور — ۱۵۵

بخش چهارم

مسائل کتاب استخراج الاوتار

الف ــ مقدمه — ۱۵۷

ب ــ مسائل هندسی وجبری ونجومی — ۱۵۹

ج ــ مسائل مربوط به محاسبهٔ وترهای دایره — ۲۱۸

بخش پنجم

پایان کتاب استخراج الاوتار — ۲۶۶

این کتاب را به دوست دانشمندم
جناب آقای احمد آرام تقدیم می دارم

مقدمه

در کتاب «بیرونی نامه» که دو سال پیش توسط انجمن محترم آثار ملی طبع و منتشر گردید شرح احوال و فهرست کامل آثار ریاضی‌دان نابغهٔ بزرگ ایران استاد ابوریحان بیرونی را به رشتهٔ تحریر درآوردم و دربارهٔ چند اثر ریاضی مهم وی و از جمله کتاب «مقالید علم‌الهیئة» که یکی از شاهکارهای ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی است به بحث و تحقیق پرداختم و در ضمن معرفی کتاب «استخراج الاوتار» وعده دادم که تحقیقی را که دربارهٔ آن به عمل آورده‌ام در آیندهٔ نزدیک منتشر سازم. اینک خدای دانای توانا را سپاس می گذارم که مرا در انجام دادن این مهم یاری کرد و موفق گردانید که یکی دیگر از آثار ریاضی‌دانان ایرانی را به زبان فارسی در دسترس هم میهنان خود قرار دهم.

فایدهٔ این کتاب چیست ؟

کتاب «استخراج الاوتار» که استاد بیرونی آن را در هزار سال پیش از این

نوشته امروزه از چند جهت شایان دقت و جالب توجه است .

اولا برای دانش‌آموزان و دانشجویان و سایر کسانی که به علم هندسه دلبستگی دارند مطالعهٔ این کتاب سرگرمی بسیار دلپذیری است . چه استاد در این کتاب چهار قضیهٔ هندسی را مورد بحث قرار داده و برای هر یك از آنها استدلالهای متعدد و گوناگون از خود واز سایر ریاضی دانانی که در عصر وی ویا پیش ازوی می‌زیسته‌اند آورده وسپس آنها را در حل بیش از سی مسئلهٔ هندسی وجبری ونجومی به‌کار برده است . مقایسهٔ این استدلالهای متنوع با یکدیگر و روش به‌کار بردن آنها در حل مسائل گوناگون، گذشته از اینکه آموزنده و برای ممارست در علم هندسه بسیار مفید است، به خوانندهٔ کتاب نشان می دهد کسانی که در هزار سال پیش از این سرگرم مطالعهٔ ریاضی بوده‌اند تا چه اندازه دربارهٔ نکته‌های این علم به موشکافی می‌پرداخته وآثار قدما ومعاصران خود را مورد بحث و تحقیق قرار می‌داده‌اند وچگونه قضایای نظری را در حل مسائل عملی به‌کار می‌برده‌اند .

ثانیاً برای کسانی که به تاریخ ریاضیات دلبستگی دارند مطالعهٔ کتاب استخراج‌الاوتار از این جهت مغتنم است که استاد بیرونی، همان گونه که عادت او بوده، هر روش و طریقه را به نام صاحب آن ثبت کرده و اسامی عده‌ای از ریاضی‌دانان را در این کتاب آورده و از آثار ریاضی آنان نام برده و استدلالهایی از آنها برای قضایای هندسی نقل کرده است که در هیچ کتاب دیگری آنها را نمی توان یافت . مثلا استدلالهایی که برای حل مسائل هفتم و هشتم (صفحات ۱۸۹ تا ۲۰۳ کتاب حاضر) ازیونانیان نقل کرده هردوبدیع ویگانه برهانهایی هستند که دراین باره از دورانهای بسیار قدیم برای حل این مسائل به دست ما رسیده است . همچنین نام «سارینوس ثیبائی» و کتاب «فی‌الاصول‌الهندسیة» او را که استاد استدلالی ازآن

نقل کرده (صفحات ۶۷ تا ۶۹ کتاب حاضر) در جای دیگر جز در آثار استاد بیرونی نمی‌یابیم. ونیز استاد در کتاب «استخراج الاوتار» از کتاب «الدوائر المتماسه لارشمیدوس» گفتگو به میان آورده وحال آنکه مورخان ریاضی مغرب زمین از وجود چنین کتابی اظهار بی اطلاعی کرده‌اند (رجوع کنید به یاد داشت ذیل همین مقدمه). نمونه‌های یاد شده نشان می‌دهد که تا چه اندازه مطالعهٔ کتاب «استخراج ـ الاوتار» نیز مانند سایر آثار بیرونی از جهت تاریخ ریاضیات وروشن کردن بسیاری از نکات مبهم آن مفید می‌تواند بود.

بالاخره کتاب «استخراج الاوتار» کتابی است که به قلم یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان ایرانی نوشته شده و از زمرهٔ میراثهای گرانبهای علمی ما ایرانیان است که باید به حفظ و بزرگداشت آنها همت گماریم و آنها را از زبان عربی که از طلوع اسلام تا حدود قرن یازدهم هجری زبان علمی دورهٔ اسلامی بوده به زبان فارسی برگردانیم تا استفادهٔ از آنها برای هم میهنانمان میسر باشد.

چگونگی تدوین کتاب حاضر

استاد ابوریحان بیرونی دو کتاب راجع به استخراج اوتار دایره به زبان عربی نوشته است که دربارهٔ نسخه‌های خطی موجود ونسخه‌های چاپی آنها و ترجمهٔ یکی از آنها به زبان آلمانی وشرح دیگری به زبان عربی در بخش اول کتاب حاضر به اندازهٔ کافی توضیح داده‌ام. اگر چه عنوان این دو کتاب با هم متفاوت است و متن آنها نیز با هم اختلافاتی دارد ولی هدف اصلی آنها محاسبهٔ وترهای دایره بر حسب قطر آن است. چون اگر تنها به ترجمهٔ متن این کتاب به زبان فارسی اکتفا می کردم چندان سودی از آن عاید نمی گردید بر آن شدم که همهٔ مطالب مهم این

دو کتاب را از نو به وجهی مدون سازم که هم فهم آنها برای خوانندهٔ کتاب سهل و ساده باشد و هم چیزی از نکته‌های علمی و تاریخی آنها حذف نشود و علاوه بر این هر جا مورد داشته باشد بتوانم به شرح مطالب پیچیده و ذکر نکات تاریخی لازم بپردازم.

نظر به جهات فوق کتاب حاضر را که حاوی همهٔ مطالب دو کتاب مذکور هست و با اصطلاحات ریاضی کنونی نوشته شده **تحریر استخراج الاوتار** نامیده‌ام و برای آنکه مطالب متن کتاب از حواشی آن متمایز باشد در پایان هر قضیه یا مسئله توضیحاتی به عنوان «یاد داشت» افزوده‌ام که با حروف ریزتر به چاپ رسیده است و کتاب را به پنج بخش به شرح زیر تقسیم کرده‌ام:

در بخش اول دربارهٔ نسخه‌های موجود کتاب «استخراج الاوتار» و تفاوتهای مهم آنها با یکدیگر به بحث پرداخته‌ام و عکس نسخهٔ خطی متن یکی از دو کتاب «استخراج الاوتار» را که در کتابخانهٔ لیدن موجود است و تا آنجا که اطلاع دارم تا کنون به چاپ نرسیده و منتشر نشده است ضمیمهٔ این بخش قرار داده‌ام تا مورد استفادهٔ پژوهندگان قرار گیرد.

در بخش دوم، مقدمهٔ هر یك از دو نسخهٔ موجود کتاب «استخراج الاوتار» را مورد بحث قرار داده به ترجمهٔ آنها به زبان فارسی پرداخته‌ام.

در بخش سوم چهار قضیهٔ هندسی را که اساس کتابهای «استخراج الاوتار» است شرح داده استدلالهای مختلف آنها را ثبت کرده‌ام.

در بخش چهارم سی مسئله را که با استفاده از چهار قضیهٔ مذکور حل شده است نوشته‌ام و این مسائل را به دودسته تقسیم کرده‌ام. دستهٔ اول مشتمل بر مسائل هندسی و جبری و نجومی است ودستهٔ دوم مسائل مربوط به محاسبهٔ وترهای دایره است.

در بخش پنجم، پایان کتاب استخراج‌الاوتار را از روی نسخه‌های مختلف مورد بحث قرار داده‌ام.

سپاسگزاری

از انجمن محترم آثار ملی که تاکنون با انتشار دهها کتاب نفیس به‌معرفی آثار ادبی و علمی و هنری کشور عزیزمان پرداخته‌اند بی‌نهایت سپاسگزارم که این کتاب را نیز مانند کتاب «بیرونی نامه» تألیف این حقیر مورد توجه قرار داده آن را جزء انتشارات خود به زیور طبع آراسته‌اند و با کمال صفای عقیدت و نهایت حسن سلوک مرا در چاپ این کتاب یاری فرموده‌اند.

همچنین از اولیای محترم کتابخانهٔ لیدن که عکس نسخهٔ خطی کتاب «استخراج‌الاوتار» را در اختیار بنده گذاشته اجازهٔ چاپ آن را داده‌اند و از دوست عزیزم آقای محمد رنجی که شکلهای هندسی این کتاب را رسم کرده است ممنون و سپاسگزارم.

تهران-خردادماه ۲۵۳۵ شاهنشاهی

ابوالقاسم قربانی

یاد داشت درباره کتاب «الدوائر المتماسة»

در صفحات ۶۸ و۶۹ کتاب حاضر وصفحهٔ ۵۱۲ کتاب «بیرونی نامه» نوشته‌ام که ابن‌ندیم در «فهرست» کتاب «الدوائر المتماسة» را به نام ارشمیدس ثبت کرده و مورخان ریاضی از وجود این کتاب اظهار بی‌اطلاعی کرده‌اند. در موقعی که چاپ متن کتاب حاضر به پایان رسیده بود متوجه شدم که کتاب «الدوائر المتماسة» تألیف ارشمیدس را ثابت‌بن قره از یونانی به عربی ترجمه کرده و متن عربی این ترجمه درسال ۱۹۴۷ میلادی توسط جمعیت دائرةالمعارف عثمانی در جزء «رسائل ابن قره» در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده است. برهان اول قضیهٔ اول استخراج الاوتار» (صفحات ۶۷ تا ۶۹ کتاب حاضر) و برهان سوم قضیهٔ اول همان کتاب (صفحات ۷۰ تا ۷۲ کتاب حاضر) که از ارشمیدس است در پایان کتاب «الدوائر ـ المتماسة» آمده است.

یادداشت دربارهٔ برخی از مطالب کتاب «بیرونی نامه»

چون کتاب حاضر دنبالهٔ کتاب «بیرونی نامه» و بمنزلهٔ جلد دوم آن است بعضی از نکات مهم وتصحیحات لازم را که تنی چند از دوستان وسروران ارجمندم دربارهٔ آن کتاب متذکر شده مرا رهین منت خود فرموده‌اند در اینجا ذکر می کنم.

۱ـ در باب اطلاعاتی که در صفحات ۱۳۶ و۱۳۷ دربارهٔ اعداد تام آمده است باید دانست که اولا در سال ۱۹۵۷ میلادی ثابت شد که اگر عدد تام فردی وجود داشته باشد از 10^{21} کمتر نیست. ثانیاً بزرگترین عدد تام زوجی کـه تـا کنون شناخته شده عدد $(2^{11213} - 1)\,2^{11212}$ است که دارای ۶۷۵۱ رقم است (از نامهٔ مورخ ۲۱ دیماه ۱۳۵۴ دانشمند گرامی جناب آقای دکتر غلامحسین مصاحب).

۲ـ در ذیل صفحهٔ ۲۰۹ نوشته شده است: «اصم بودن عدد π در سال ۱۸۸۲ توسط لیندمان (F . Lindemann) به ثبوت رسید» این مطلب باید چنین اصلاح شود: «اصم بودن عدد π در سال ۱۷۶۱ میلادی توسط لامبـرت (Lambert) به ثبوت رسید ـ لیندمان در سال ۱۸۸۲ میلادی متعالی بودن عدد π را ثابت کرد و به این نحو به کوشش در حل مسئلهٔ تربیع دایره خاتمه داد (از همان نامه)

۳ـ در صفحهٔ ۲۸۳، سطر ششم، دستور گاوس اشتبـاه چاپ شده و صحیح آن چنین است:

$$f(n) = 2^{(1^n)} + 1$$

۴ ـ در صفحهٔ ۵۰۸ محاسبهٔ مجموع $\sum_{0}^{63} 2^k$ اشتباهاً محاسبـهٔ مجمـوع $\sum_{1}^{63} 2^k$ چاپ شده و در سطر پنجم همین اشتباه تکرار شده‌است.

۵ـ مطلب سطر هفتم صفحهٔ ۵۰۸ (که چنین شروع میشود: در شمارهٔ ۵۱۳ ۰۰۰) زاید است و باید حذف شود.

۶ـ دربارهٔ مطالب صفحهٔ ۵۱۲ رجوع شود به یاد داشت فوق دربـارهٔ کتاب «الدوائر المتماسة»

بخش اول

کتاب استخراج الاوتار و نسخه‌های موجود آن

استاد **ابوریحان بیرونی** دربارهٔ استخراج اوتار دایره، یعنی محاسبهٔ وترهای دایره برحسب قطر آن، دو کتاب باعنوانهای زیر نوشته بوده است:

الف- یکی باعنوان **مقالة فی استخراج الاوتار فی الدائره بخواص الخط المنحنی الواقع فیها** که آنرا ظاهراً درسال ۴۱۸ ه.ق نوشته بوده(۱) ودرهرصورت نام آن را درفهرستی که درسال ۴۲۷ ه.ق از آثارخود ترتیب داده درجزوکتابهائی آورده است که درآن تاریخ تألیف آنها را به پایان رسانیده بوده(۲).

ب- و دیگری باعنوان **جمع الطرق السائره فی معرفة اوتار الدائره** که درسال ۴۲۷ ه.ق هنوزکامل نشده بوده واستاد نام آن را درفهرست مذکور درشمار

---

(۱)- درپایان نسخهٔ خطی «استخراج الاوتار» موجود دربانکیپور آمده است: «وفرغ ابوریحان من تصنیفه فی رجب سنة ثمانی عشرة واربعمائة».

(۲)- رجوع کنید به «آثارالباقیه» چاپ زاخاو صفحهٔ XXXXVI سطراول

آثاری که می‌خواسته بعداً آنها را کامل و پاکنویس کند ذکر کرده است[۱]. نام این کتاب را استاد در فهرست آثار خود به‌صورت فوق آورده ولی در پایان کتاب «استخراج الاوتار» چاپ قاهره نام آن بصورت زیر آمده است: کتاب عملته **لحصر** الطرق السائره فی استخراج اوتار الدائره».

نسخه‌های خطی موجود کتاب استخراج الاوتار

از کتاب «استخراج الاوتار فی الدائره بخراص الخط المنحنی الواقع فیها» یك نسخهٔ خطی درمجموعهٔ شمارهٔ ۲۴۶۸ کتابخانه بانکیپور (خدابخش پاتنا) ویك نسخه درقاهره ویك نسخه در کتابخانهٔ مرادملا دراستانبول موجود است[۲] و دوبارهم به شرحی که‌خواهد آمد درحیدرآباد دکن وقاهره به چاپ رسیده‌است.

نسخهٔ خطی «عل»

یك نسخهٔ خطی دیگر از کتاب «استخراج الاوتار» باهمان عنوان «استخراج الاوتارفی الدائرة بخواص الخط منحنی...» در کتابخانهٔ لیدن به‌شمارهٔ ۱۰۱۲ موجود است که‌با نسخه‌های مذکور تفاوتهای اساسی دارد و کتابی کامل به‌نظر می‌رسد. بعداً در بارهٔ این نسخه و تفاوتهای آن با نسخه‌های دیگر کتاب «استخراج الاوتار» گفتگوخواهم کرد ونتیجه خواهم گرفت که به‌احتمال قوی این نسخه را می‌توان

(۱)- استاددرکتاب «آثارالباقیه» (چاپ زاخاو صفحهٔ XXXXVI) دربحثی که‌دربارهٔ طول عمرخودکرده نوشته‌است: «فکان قدفنی ولم‌یبق منه غیرالجرة والقصعةالالشیء واحدوهو اتمام ماعلی الیدمن النواقص و تبییض المسود فی التعالیق» و سپس نام‌عده‌ای ازآثار خودرا که‌هنوز ناقص بوده وازجمله نام‌کتاب «جمع الطرق السائره...» راآورده‌است.

(۲)- رجوع کنید به «بوآلو O» ص ۱۹۷ شمارهٔ ۰۶۴.

نسخه‌ای از کتاب «جمع الطرق السائره فی معرفة اوتار الدائره» دانست.
این نسخه را در تهیهٔ کتاب حاضر اساس کار قرارداده ودرمتن کتاب ازآن با علامت اختصاری «نسخهٔ **عل**» (یعنی عکس نسخهٔ موجود درلیدن) نام برده‌ام وعکس صفحات آن را در پایان همین بخش (به عنوان ضمیمهٔ بخش اول) به چاپ رسانیده‌ام و برای آنکه ارجاع به آن آسان باشد صفحات آن را از ۱ تا ۴۲ شماره گذاری کرده‌ام.

ترجمهٔ نسخهٔ خطی «عل» به زبان آلمانی

سوتر (H.Suter) محقق ودانشمند سویسی [۱] درسال ۱۹۱۱ کتاب «استخراج الاوتار» راازروی نسخهٔ خطی «عل» به زبان آلمانی ترجمه کرد وباشرح و تفسیر استادانه‌ای که بر آن نوشت منتشر ساخت [۲]. در تهیهٔ کتاب حاضر ازاین اثر **سوتر** استفادهٔ فراوان برده‌ام.

استخراج الاوتار چاپ حیدرآباد

(از این چاپ در کتاب حاضر با نشانهٔ اختصاری «چد» نام برده‌ام).

درسال ۱۹۴۸ میلادی جمعیة دائرة المعارف العثمانیة درحیدرآباد دکن کتاب «استخراج الاوتارفی الدائره...» را ازروی نسخهٔ خطی موجود در بانکیپور به وضع مغشوشی به چاپ رسانید. توضیح اینکه نسخهٔ خطی ۲۴۶۸ بانکیپور که کتاب «استخراج

(۱)- دربارهٔ احوال وآثار وی رجوع کنید به مجلهٔ ایسیس (Isis) جلد پنجم سال ۲۳-۱۹۲۲ صفحات ۴۰۹ تا ۴۱۷ (تاریخ تولد وی چهارم ژانویهٔ ۱۸۴۸ وتاریخ وفات وی هفدهم ماه مارس ۱۹۲۲ است).

(۲)- رجوع کنید به «سوتر A» در فهرست منابع کتاب حاضر.

الاوتار» جزوی از آن است مجموعه‌ای است مرکب از عده‌ای از آثار بیرونی و دیگران. ظاهراً اوراق این مجموعه پراکنده وجابه‌جاشده ودر نتیجه قسمتهایی از بعضی از کتابها ورساله‌های آن وارداوراق کتابها ورساله‌های دیگر موجود درهمان مجموعه شده است. کسانی که خواسته‌اند «استخراج الاوتار» را ازروی آن نسخه به‌چاپ برسانند به‌این مطلب توجه نکرده‌اند و اوراق کتاب «استخراج الاوتار» را مخلوط بااوراق پراکنده‌ای از «مقاله فی التحلیل والتقطیع» تألیف **بیرونی** (۱) و چند برگ از «مقالة فی ان لوازم تجزیء المقادیر...» تألیف **بیرونی** (۲) وقسمتی از کتاب «افرادالمقال فی امر الاظلال» تألیف **بیرونی** (۳) وبخشی از کتاب «فی طریق التحلیل والترکیب» تألیف **ابراهیم بن سنان بن ثابت** (۴) رابه‌صورتی که درمجموعهٔ مذکور با هم مخلوط بوده درهم و برهم به چاپ رسانیده‌اند. مدتی مدید باحوصلهٔ فراوان صرف تمیزدادن ماهیت مطالب این اوراق چاپ شده ازیکدیگر کرده‌ام و نتیجه گرفته‌ام که :

فقط مطالبی که از صفحهٔ ۳ تا اواسط صفحهٔ ۱۰۸ کتاب «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد و سپس ازوسط صفحهٔ ۲۲۴ تا پایان صفحهٔ ۲۲۶ همان چاپ آمده مربوط به کتاب «استخراج الاوتار» تألیف بیرونی است ،

---

(۱)- رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحهٔ ۶۱ شمارهٔ ۲/۳۰.

(۲)- رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحهٔ ۷۰ شمارهٔ ۲/۴۱.

(۳)- رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحهٔ ۴۷ شمارهٔ ۲/۲۳.

(۴)- ازصفحهٔ ۱۳۸ تاپایان سطرچهارم ازصفحهٔ ۱۵۴ ونیزازسطرچهارم صفحهٔ ۱۸۵ تانیمی ازصفحهٔ ۲۲۰ «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد.

دربارهٔ ابراهیم بن سنان رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحهٔ ۵۲۲

که احیاناً در بعضی ازمواضع آن افتادگی دارد ومغلوط هم به‌چاپ رسیده‌است.
بقیهٔ اوراق «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد قسمتهای پراکنده‌ای از آثار
دیگراست. مثلاً ازصفحهٔ ۱۳۸ تاپایان سطر چهارم ازصفحهٔ ۱۵۴ ونیز ازسطر چهارم
صفحهٔ ۱۸۵ تا نیمی از صفحهٔ ۲۲۰ همان چاپ بخشی از کتاب «فی طریق التحلیل
والترکیب و سایراعمال فی المسائل الهندسیة» تألیف **ابراهیم بن سنان بن ثابت
بن قره** است (رسالهٔ دوم از «رسائل ابن سنان» که درسال ۱۹۴۸ میلادی درحیدرآباد
دکن به‌طور ناقص به چاپ رسیده‌است) وغیره.

استخراج الاوتار چاپ مصر

(ازاین چاپ در کتاب حاضر باعلامت اختصاری «چم» نام برده‌ام).

درسال ۱۹۶۵ میلادی آقای **احمدسعیدالدمرداش** کتاب «استخراج الاوتار»
را بنا به گفتهٔ خودش ازروی دونسخهٔ موجود در کتابخانهٔ بانکیپور و کتابخانهٔ مرادملا
در استامبول با افزودن مطالبی به‌عنوان شرح در مصر بچاپ رسانید.

مطالبی که آقای **احمدسعیدالدمرداش** به عنوان متن کتاب «استخراج
الاوتار» درچاپ خودآورده همان مطالبی‌است که درچاپ حیدرآبادآمده ، باهمان
وضع آشفته و درهم و برهم ، و مخلوطی است از کتاب «استخراج الاوتار» ومطالب
پراکنده‌ای از کتابهای دیگر که ذکرش گذشت ودراین چاپ به اختلاف نسخه‌ها
جزدریك مؤرد اشاره نشده است.

جای تعجب‌است که آقای «استاد احمدسعیدالدمرداش» که بقول خود کتاب
«استخراج الاوتار» را مورد تحقیق علمی قرار داده عبارت زیررا بدون اندك دقت
از قول **بیرونی** به‌چاپ رسانیده است : «وقدکان لجدی ابی الحسن ثابت فی ذلك

ترکیب علی‌هذه‌الجهة(۱)»، و متوجه نشده است که **ابوالحسن ثابت‌بن‌قرة** جد بیرونی نبوده است. علت این اشتباه آن است که همان گونه که پیش از این نوشتم اصولاً این قسمت از کتاب چاپ مصر بخشی از کتاب «فی طریق التحلیل والترکیب» تألیف **ابراهیم‌بن‌سنان‌بن‌ثابت‌بن‌قره** است و اصولاً ربطی به «استخراج‌الاوتار» تألیف بیرونی ندارد.

تفاوتهای مهم نسخه‌های چاپی «چد» و «چم» با نسخهٔ خطی «عل»

نسخهٔ خطی «عل» با آن قسمت از نسخه‌های چاپی «چد» و «چم» که مربوط به «استخراج‌الاوتار» است تفاوتهای فراوان دارد که بسیاری از آنها اساسی و بعضی جزئی است. گذشته از این بعضی از این اختلافات طوری است که نمی‌توان قبول کرد که کسی جز خود **استاد بیرونی** در آنها دست برده و تغییر داده باشد و با اطمینان می‌توان گفت که هر دو متن را خود استاد در دو زمان مختلف تدوین کرده است. چون اگر بخواهم همهٔ این اختلافات را شرح دهم مطلب بسیار به درازا خواهد کشید این است که به‌عنوان نمونه به ذکر چند فقره از مهمترین آنها اکتفا می کنم.

الف- چنانکه در بخش دوم شرح داده‌ام قسمتی از مقدمهٔ نسخهٔ خطی «عل» با مقدمهٔ نسخه‌های چاپی تفاوت دارد و از دقت و موشکافی در مطالب آن چنین برمی‌آید که استاد نسخهٔ «عل» را پیش از متن نسخه‌های چاپی انشا کرده بوده است.

ب- پایان نسخه‌های چاپی با پایان نسخهٔ خطی «عل» نیز، چنانکه در بخش پنجم کتاب حاضر خواهیم دید، اختلاف بارز دارد. به این معنی که استاد در اولی متذکر شده است که وتر یك درجه را در کتاب خود موسوم به «تکمیل زیج حبش بالعلل و

(۱)- رجوع کنید به «چد» صفحهٔ ۲۸۶ سطر هشتم از پایین صفحه.

تهذیب اعماله من الزلل» به‌دست آورده‌است. اما در پایان نسخهٔ خطی « عل » نوشته است که همهٔ ریاضی‌دانان ازمحاسبهٔ دقیق وتر یك درجه عاجز مانده‌اند وفقط آنرا به تقریب حساب کرده‌اند. از این اختلاف چنین برمی‌آید که استاد درموقع تألیف نسخهٔ «عل» هنوز کتاب «تکمیل زیج حبش» راتألیف نکرده بوده‌است.

ج ـ درنسخه‌های چاپی برای حالات مختلف شکل مربوط به قضیهٔ اول بحثی شده‌است(۱) که درنسخهٔ خطی «عل» دیده نمی‌شود.

د ـ درنسخه‌های چاپی ابتدا چهار قضیهٔ هندسی که درواقع اساس کتاب «استخراج الاوتار» راتشکیل می‌دهند بیان‌و برای‌هریك استدلالهای مختلف‌ذکرشده است. امادرنسخهٔ خطی «عل» فقط دوقضیهٔ‌اول‌ودوم‌ازچهارقضیهٔ‌مذکور جداگانه‌بیان وبه‌طرق مختلف ثابت‌شده ودوقضیهٔ‌سوم‌وچهارم تقریباً درضمن‌استدلالها وحل‌مسائل مورد استفاده واقع گردیده است و این مهمترین اختلاف نسخهٔ خطی « عل » با نسخه‌های چاپی است وتردیدی نمی‌توان داشت که این تغییرات را خود استاد در تألیف‌خود داده ومتن هردو نسخه بدست خود استاد انشا شده است. از بررسی ترتیب این قضایا معلوم میشود که استاد ابتدا متن نسخهٔ خطی « عل» را نوشته و چون در این متن مطالب بسیار فشرده بوده بعداً این ترتیب را به‌هم زده و قضایا را به وجهی که در نسخه‌های چاپی آمده مرتب کرده است.

هـ ـ درنسخه‌های چاپی این نکته که می‌توان بعضی ازچهار قضیهٔ مذکور را ازسه‌قضیهٔ دیگرنتیجه گرفت جداگانه وبتفصیل بیان شده‌است(۲). درصورتی که

(۱)ـ رجوع کنید به «چد» صفحات ۶۵ ـ «چم» صفحات۲۳ و ۲۴.
(۲)ـ رجوع کنید به «چد» صفحات ۴۲تا ۴۵ و ۴۸ و ۴۹ ـ «چم» صفحات ۸۲ تا ۸۵ و ۸۹ و ۹۰ .

درنسخهٔ خطی «عل» این مطلب دردنبال هریك از استدلالهای قضیهٔ دوم آمده واستاد بعضی ازاین استدلالها رامقدم (سابق) وبعضی دیگر را تابع (لاحق) نامیده است(۱) واین نیزیکی ازاختلافهای اساسی نسخهٔ خطی «عل» بانسخه‌های چاپی‌است ومؤید این نظراست که متون هردونسخه را خود استاد انشا کرده است.

و- درنسخه‌های چاپی چنداستدلال برای قضایای دوم وسوم ذکرشده که در نسخهٔ خطی «عل» دیده نمی‌شود. مانند برهانهائی که در کتاب حاضربه عنوان برهانهای دهم و دوازدهم قضیهٔ دوم وبرهانهای اول و دوم قضیهٔ سوم ثبت کرده‌ام. همچنین درنسخه‌های چاپی برخی ازمسائل هست که درنسخهٔ خطی «عل»نیامده‌است مانندمسئله‌ای که به‌عنوان مسئلهٔ سی‌ام در کتاب‌حاضر نوشته‌ام‌وچندمسئلهٔ‌دیگر (۲). این‌مطلب نیز مؤیدآن‌است که استاد متن‌نسخه‌های چاپی را بعد ازمتن نسخهٔ‌خطی «عل» نوشته بوده است.

دربارهٔ نسخه‌های چاپی و نسخهٔ خطی «عل» چه میتوان گفت ؟

ازمقایسهٔ نسخه‌های چاپی‌ونسخهٔ خطی «عل» از «استخراج‌الاوتار» ودقت در طرزبیان وروش‌تقسیم‌بندی مطالب آنها ومشاهدهٔ اختلافاتی که مختصری ازآنها را شرح دادم می‌توان نتیجه گرفت که :

اولاً نسخهٔ‌خطی «عل» کتابی‌است درحد خودکامل‌وافتادگی ندارد ودرسلسلهٔ مطالب آن گسیختگی دیده نمی‌شود. این‌نسخه با یك مقدمه شروع شده وسپس دو قضیهٔ هندسی یکی پس‌ازدیگری درآن مطرح گردیده وبرای هریك‌ازآنهاچندین

(۱)- رجوع کنید به مقدمهٔ بند «ج» ازبخش سوم کتاب حاضر.

(۲)- رجوع کنید به «چد» : صفحات ۶۹ تا ۷۱ و صفحات ۱۰۵ تا ۱۰۸ - «چم»: صفحات ۱۲۰ تا ۱۲۲ وصفحات ۱۶۱ تا ۱۶۳.

استدلال از ریاضی دانان مختلف ذکر شده است. آنگاه راه حل عده‌ای از مسائل هندسی وجبری و نجومی در آن شرح داده شده و بالاخره مسائل اساسی مربوط به استخراج اوتار دایره در آن مطرح وحل گردیده ودر پایان کتاب بحثی کلی در بارهٔ استخراج وتر یك درجه پیش کشیده شده واستاد در آنجا متذکر شده است که همهٔ ریاضی‌دانان در محاسبهٔ وتر یك درجه کوشیده‌اند ولی هیچکس آن را به تحقیق به دست نیاورده.

ثالثاً نسخه‌های چاپی شامل قسمت مهم واساسی کتاب «استخراج الاوتار» هست ولی مطالب مفصلی از کتابهای دیگر با آن مخلوط شده است. ورویهم رفته آن قسمت از نسخه‌های چاپی که مربوط به «استخراج الاوتار» است مطالبش پخته‌تر ورساتر ومنظمتر ازمطالب نسخهٔ خطی «عل» است وتقریباً بااطمینان می‌توان گفت که استاد متن نسخهٔ «عل» را پیش ازمتن نسخه‌های چاپی تألیف وتدوین کرده بوده‌است.

ثالثاً بادر نظر گرفتن اینکه استاد بیرونی دو کتاب در بارهٔ استخراج وترهای دایره نوشته بوده و با دقیق شدن در اختلافات اساسی که متن نسخه های چاپی با نسخه خطی « عل » دارد می توان احتمالاً نسخهٔ خطی «عل» را نسخه‌ای از کتاب « جمع الطرق السائره فی معرفة اوتارالدائره » دانست که استاد قبلا آن را نوشته بوده و به‌قول خود، چنانکه قبلاً گفتم، می خواسته است در آن دست ببرد وآن را اصلاح کند.

در اینکه متن نسخه‌های چاپی را، پس از حذف قسمتهای الحاقی، می توان متن کتاب «استخراج الاوتار بخواص خط المنحنی...» دانست تردیدی نیست. چه در پایان نسخه‌های چاپی آمده است (۱) «وقد سلکت فی استخراج وتر الجزء الواحد

(۱)- رجوع کنید به «چد» ص۲۲۶- «چم» ص ۲۸۶

فی شرحی لعلل زیج حبش طریقاً آخر. **ثم جمعت ذلك الی ما للقدماء و المحدثین فی کتاب عملته لحصر الطرق السائره فی استخراج اوتار الدائره.**

پس بدون تردید نسخه‌های چاپی مشتمل بر قسمتهایی از کتاب « استخراج الاوتار بخواص الخط المنحنی...» است که استاد در آن به‌تألیف دیگر خود یعنی به کتاب «جمع الطرق السائره ...» اشاره کرده است. عبارت فوق در پایان نسخهٔ خطی «عل» دیده نمی‌شود و در آنجا مطلب اصولا به‌نحو دیگری بیان شده‌است.

بااین‌حال برای اینکه نسخهٔ خطی «عل» را نسخهٔ متن کتاب « جمع الطرق السائره فی معرفة اوتار الدائرة » بدانیم یك اشکال باقی می‌ماند و آن این‌است که عنوان این نسخهٔ خطی «استخراج الاوتار فی الدائره بخواص...» است و نه «جمع‌الطرق السائره ...». شاید این عنوان را کاتب نسخهٔ خطی «عل» نظر به‌اینکه کتاب « استخراج الاوتار فی الدائره ... » شهرت بیشتری داشته از خود افزوده باشد. والله اعلم.

کتاب حاضر چگونه فراهم آمده است؟

دراین تردید نیست که **استاد بیرونی** دو کتاب دربارهٔ استخراج اوتار دایره نوشته بوده است که هدف اصلی از تألیف آنها به‌دست آوردن دستورهایی برای محاسبهٔ طول وترهای دایره برحسب قطر آن بوده است. حال چه‌فرض کنیم که نسخهٔ خطی «عل» متن یکی ازاین دو کتاب و نسخه‌های چاپی متن یکی دیگر از آنها باشد وچه این‌دونسخهٔ مختلف رایك کتاب بدانیم وفرض کنیم که‌استاد یکی از آنها را قبلا نوشته‌بوده و بعداً آن‌راتصحیح وتکمیل کرده ونسخهٔ دیگر رافراهم آورده است درهرحال می‌توان نسخه های موجود را مشتمل برقضایا و مسائلی دانست که

استاد در بارهٔ استخراج اوتار دایره نوشته‌است و با روی هم ریختن مطالب نسخه‌های موجود و مرتب ساختن آنها یك کتاب جامع در بارهٔ استخراج اوتار دایره، چنانکه خواستهٔ خود **استاد بیرونی** از تألیف این کتابها بوده است ، اما به‌زبان فارسی و با به‌کار بردن اصطلاحات متداول کنونی ، فراهم آورد و آن‌را «**تحریر کتاب استخراج الاوتار**» تألیف **ابوریحان بیرونی** نامید و این کاری است که خداوند متعال توفیق انجام‌دادن آن را نصیب این بندهٔ ناچیز خود فرموده است.

IQBAL LIBRARY
The University of Kashmir
Acc. No. [redacted]
Author [redacted]
Title [redacted]

ضمیمهٔ بخش اول

عکس صفحات نسخهٔ خطی کتاب
« استخراج الاوتار » از روی نسخهٔ موجود
در کتابخانهٔ لیدن

كتاب استخراج الاوتار في الدايرة بخواص الخط المنحني الواقع فيها جمع ابي الريحان محمد البيروني

وقفت ايدك الله علي ما استعملته من العلة الداعية اياي الى التفحص عن عدة براهين
على صحيح دعوي لقدماء اليونانيين في انقسام الخط المنحني في كل قوس بالعمود النازل عليه
من منتصفها وما وجدتني عليه من الولوع به والميل الى معاودة النظر فيه حتى
نسبتني لاجله الى الاشتغال بفصول الهندسة من غير ان تشعر بحقيقة الفصول
التي هي الزيادة علي الكفاية في كل شيء وانت ايدك الله لو حققت اغراض علم الهندسة
التي هي نسب مقادير ما هو تحت الكمية بعضها الى بعض وانها هي التي يتوصل بها الى معرفة
مقدار كل شيء يحتاج اليه من مذروع ومكيل وموزون ما هو بين مركز العالم
الى اقصى محسوس فيه وعرفت ان بها تعقل الصور مجردة عن المواد وتصورت
حقيقة البرهان تصورا انطباعيا حتى لا يذهب على المهندس ما يذهب علي كثير
من المخلصين من اصحاب المنطق وابناء الفلسفة مهما سلك فيه مسلك صناعته
ثم يرتقي بوساطة التدرب بها من المعالم الطبيعية الى المعالم الالهية التي
تمنع الغوص معانيها وصعوبة ماخذها ودقة طرايقها وجلالة امرها
وبعد تصورها عن ان ينقاد لكل واحد او يدركها من عدل عن صناعة
البرهان ولكنا ايدك الله ان يعدلني على ما ذكرت لو كنت توليت استخراج
تلك الطرق باسرها فضيعت الزمان فيما يكفي منه اليسير او لو لم يحصل منها
آخر الامر ما هو العمدة في علم الهيئة اعني استخراج الاوتار في الدايرة ونسب
مقاديرها الى مقدار القطر واجزايه المفروضة له لكن هذه الدعوي وقعت
بين يدي جماعة من فضلاء اهل هذا العلم فاجتهد كل منهم في تصحيحها و
واقامة البرهان عليها فاجتمع عندي منها ما كنت كررا النظر فيه حبا للعلم

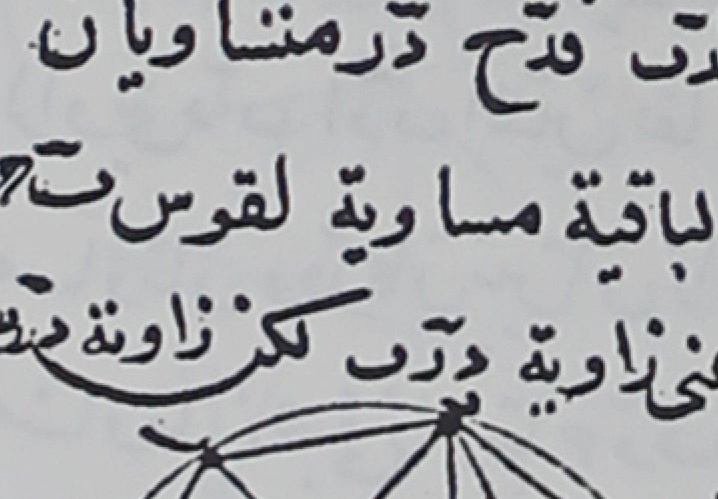
للعلم وتعليلا للفؤاد عن غليل الاشواق الى اوكيا الفضلاء ايام الغربة واعقبني ذلك صرف الفكرة اليه حتى شاركهم في اقامة البرهان عليه على ما سبق في خلال الكلام وصار اصلا من الاصول الهندسية تنبت عليه جوابات كثير من المسايل سيلتها وقد جمعت كل ذلك كل واصفت كل طريقة الى صاحبها كما هو عادتي لسطلي فيها ويعرف مآل جميعها الى الكلمة الواحدة وما سنح منه اخيرا من الوصول الى معرفة الاوتار فيتمهد عذري لديك فيما حمت حوله من عدلي ورب لائم مليم وما التوفيق الا من عند الله العزيز الحكيم

الدعوى

اذا عطف في قوس ما من دائرة خط مستقيم على غير تساوي وانزل عليه من منتصف تلك القوس عمود فانه يقسم بنصفين مثاله ان خط ا ب ج المنحني في قوس ا ب ج قد انزل عليه من منتصف قوس ا ج عمود د ه فاقول ان خط ا ب ج المنحني قد انقسم بنصفين اعني ان ا ه مساو لمجموع ه ب ب ج والله اعلم بالصواب

البرهان عليه لارشميدس في كتاب الدواير

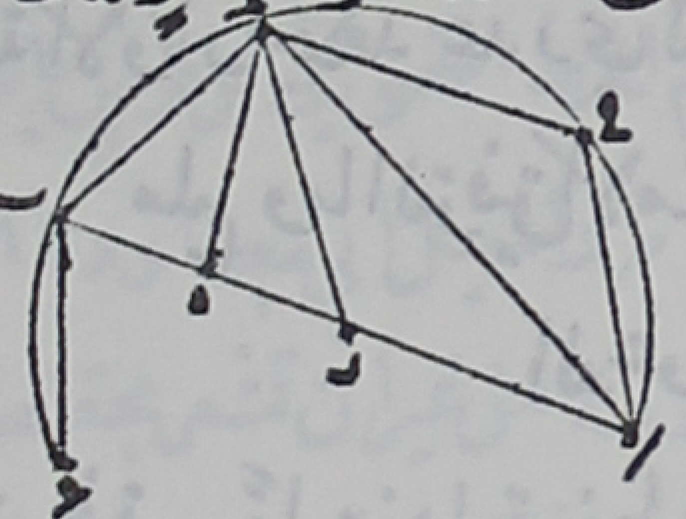
لنفصل قوس د ح مساوية لقوس د ب . ونصل د ج د ب ونجعل ه ز مساويا له ب ونصل د ز د ا فمن اجل ان عمود د ه مشترك وزاويتا ه قايمتان يكون خطا د ز د ب مساويان وخط د ح مساو لد ب فد ح د ز متساويان ولان قوس د ب متساوية لقوس د ح وقوس ح ا الباقية مساوية لقوس ب ج فان زاويتا ح د ا د ا ب مساويان لزاويتي د ج ا اعني زاوية د ج ب لكن زاوية د ز ب



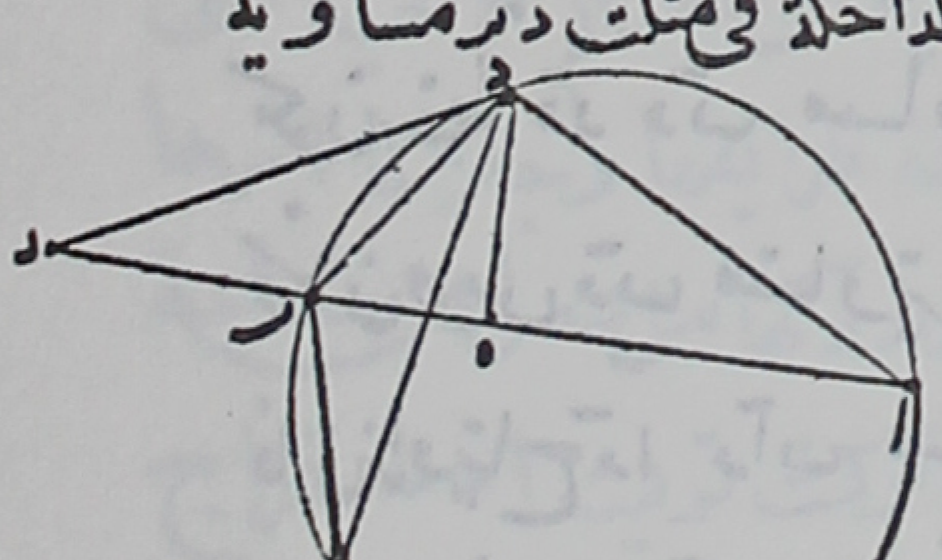
مساوية لزاويتي ز ا د ز د ا فزاويتا ز د ا د ا ح متساويان و د ز مساوية لد ح و د ا مشترك فقاعدتا ا ز ا ح متساويتان لكن ا ح مساو لب ج و ا ز مساو لب ج و ز ه مساو له ب فا ز مع ز ه مساو له ب مع ب ج وذلك ما اردنا ان نبين

برهان لابي سعيد احمد بن علي الصير الجرجاني

وقد اتفق لابي سعيد الضرير برهان على ذلك نسبه بهذا الذي لارشميدس وهو ان قال
نجعل وتر آج مساويا لوتر بجه ونفصل آز مساويا لآج ونصل آد دز دب دج فلان
قوس آد مساوية لقوس دج وقوس آج فرضت مساوية لقوس بجه فقوسا دج دب متساويتان
فزاويتا جاد داز متساويتان وآج مساو لآز وآد مشترك فقاعدتا جد دز متساويتان
لكن جد دب متساويان فدز مساو لدب وعمود ده على القاعدة فزه مساو لهب فاز مع زه
مساو لبجه مع هب وذلك ما اردنا ان نبين ه



برهان ثان لارشميدس في كتاب الدوائر
نخرج آب على استقامة ونجعل بـــه
مساويا لدا ونصل دا ده دب دز فلان وتري آد دج متساويان
وآد دز متساويان فان دز دج متساويان ومن اجل ان زاويتي دآب دجب
متساويتان لكونهما على قوس واحدة وزاويتا دآه دزه متساويتان فان زاويتي دزب
دجب متساويتان ومن اجل ان قوس آج مساوية لقوس دج فانا نجعل قوس آج مشتركة
فيكون قوس داج مساوية لقوس دجا لكن زاوية دبج هي على قوس داج وزاويتا داب
ادب على قوس دجا اما زاوية دآب فعلى قوس دب واما زاوية ادب فعلى قوس بجا
فزاوية دبج مساوية لزاويتي دآب ادب لكن زاوية دبه الداخلة في مثلث دبه مساوية
لزاويتي دآب ادب اللتين تقابلانها فزاويتا دبج دبه

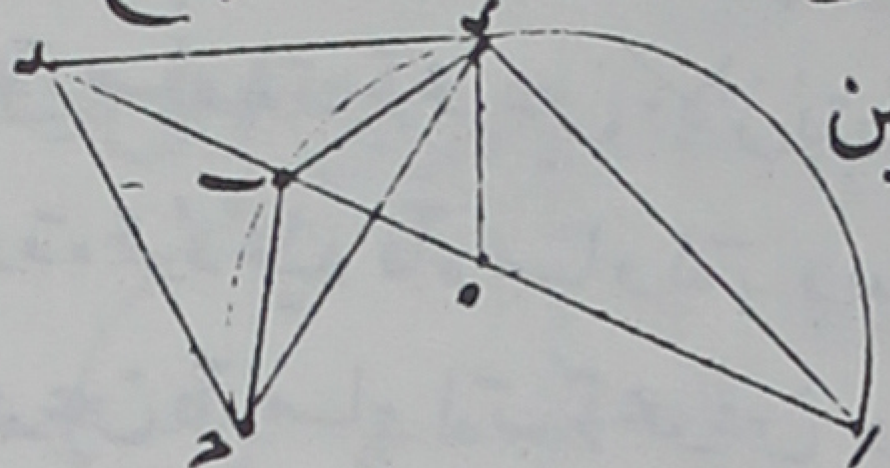


متساويتان وقد كان تبين ان زاويتي دزب دجب
متساويتان فبقي زاويتا جدب زدب متساويتان
وخط دز مساو لخط دج ودب مشترك فقاعدتا
دب به متساويتان فخطا دب به متساويان لخط ه ز اعني ها وذلك ما اردنا ان نبين

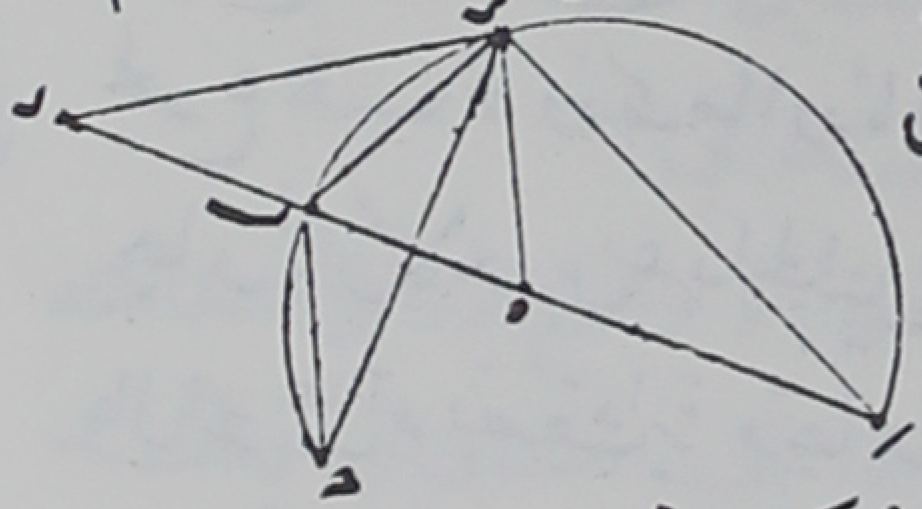
برهان لابي الحسن ادرخود ابن اشاذحشنس

وله على ذلك برهان قريب مما تقدم وهو انه قال نخرج آب على استقامة ونجعل به مساويا
لدا ونصل دا دب دز دج زج فلان آه مساو لدز وده مشترك وزاويتا ه قائمتان

ما تبيان يكون آد مساويا لدز ولدح وزوايا داب درب لحز متساوية ومثلث دزح
متساوي ساقي دح دز فزاويتا دحز دزح متساويتان واذا اسقطنا منهما زاويتي دحب
دزب المساويتين بقيت زاويتا لحز ترح متساويتان فخطا حب مساو لتز وتز مع تب



مساو لكله اعني حب مع تب مساوٍ لدا وذلك ما اردنا ان نبين
برهان ثالث لارشميدس في كتاب الدواير
ووجد بعينه في مسايل لليونانيين لا ثقه ان يكون
لابلونيوس ترجمة يوحنا بن يوسف قال نخرج آز على استقامته ونجعل
بز مساويا لدا ونصل دح دب دز فلان دح وتر في الداير يكون قطعه دبح اصغر من نصف
دايرة وليس يمكن ان يكون اعظم من نصف دايرة لان قوس آد مساويه وليس يمكن ان تقرر
من دايرة هو ساق متساويان كل واحدة منهما اعظم من نصف الدور من غير ان يشترك
بينهما شيء فزاوية دح التي يقبلها منفرجة ؛ ومن اجل ان آد وتر في الداير يكون قطعة
دحا اعظم من نصف دايرة وزاوية دتا التي يقبلها حادة وبقي زاويتا دتز منفرجة وزاويتا
دزب دحب متساويتان وخطا دح دز متساويان ونسبتهما الخط دب المشترك
واحدة فثلثا دتب دحب زاويتان من احدهما ومن حح مساويتان لزاوية من الاخر وهي ز و
الاضلاع التي تحيط بزاويتين اخراوين متناسبة وزاويتا دحز دتز كل واحدة منهما اعظم

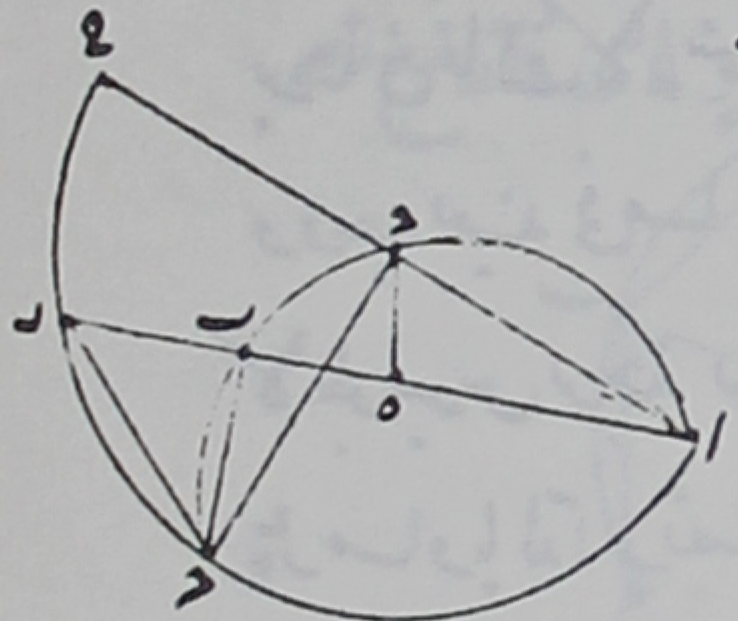


من قايمة فالزوايا الباقية متساوية والمثلثان متشابهان
فهما متساويان وتز مساو لتح فتح مع تب مساوٍ لدا و
ذلك ما اردنا ان نبين ؛

برهان ثانٍ لابي سعيد الضرير الجرجاني

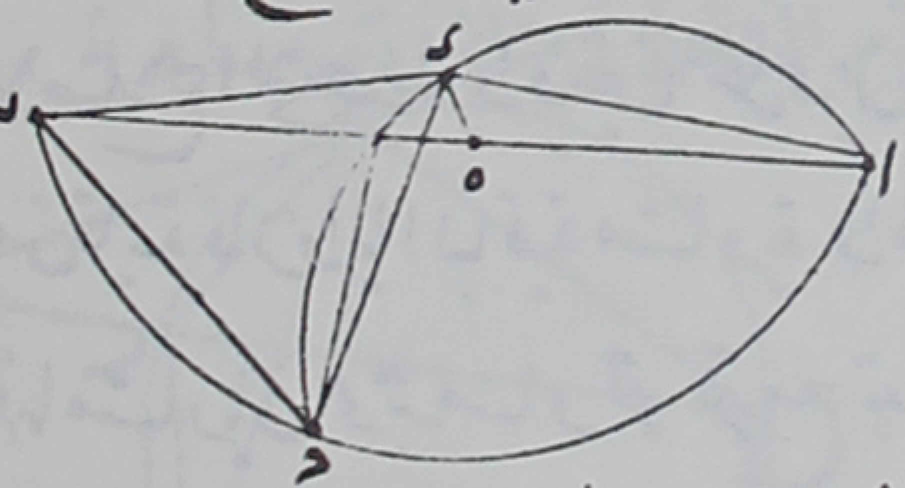
قال نخرج آد على استقامته ونجعل دح مساويا لدا وندير على مركز د وببعد دح دايرة
فيمر بنقطتي آح ويكون آح قطرها ونخرج آب حتى يلقى الدايرة على نقطة ز ونصل زح
دح فزاويتا ادح احد متساويتان لانهما في قطعة واحدة وزاوية ادح ضعف زاوية
ازح لانهما على قاعدة واحدة واحديهما على المركز والاخرى على المحيط فزاوية آدح ضعف

زاوية ازد وزاوية آح مساوية لمجموع زاويتي آدح لدحب فزاويتا دحب بزح متساويان
وزب مساو لبح وهذا حكم كل خط يخرج من آ قاطعا دايرة ادب اذا وصل ما بين قطعة
اماها وبين ح فان الخط الواصل يكون مساويا لما يقع منه بين الدايرتين ويجعل به مشتركا
فده زمساولة ب ح مجموعين ولان نقطة د مركز دايرة ازح فاز وزفيها
وده عمود عليه فاه مساو لهز وقد بين ان هز مساو لهب ب ح
مجموعين فاه مساو لهب ب ح مجموعين وذلك ما اردنا بيانه



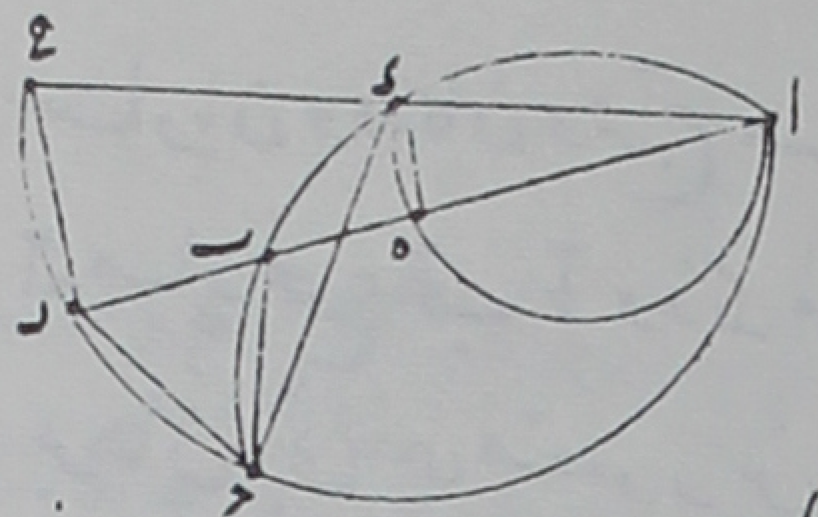
برهان لابي سعيد احمد بن محمد
بن عبد الجليل السكزي

قال نخرج آب على استقامة ونجعل بز مساويا لب ح ونصل دز
زح دح فلان ح ب بز متساويان تكون زاويتا بحز بزح متساويتان وزاوية آح مساوية
لهما فهي ضعف احديهما فزاوية ادح المساوية لزاوية آح ضعف زاوية بزح فالدايرة التي تدار
على مركز د وبعد دا تمر على نقطتي ح ز لان زاويتي ادح ازح تكونان على قطعة واحدة
من تلك الدايرة فزاوية ادح على مركز الدايرة وزاوية ازد على محيطها فخطا آد دز متساويان
وزاويتا داه دزه متساويتان ودة عمود على آز فاه هز متساويان فهز مع به مساو
لحب مع به لكن زه مساو لاه فاه مساو
لمجموع هب ب ح وذلك ما اردنا ان نبين



برهان ثان لاحمد بن عبد الجليل السكزي

قال نزيد على آد نصف دايرة دها ونخرج آد على استقامة ونجعل دح مساويا لدا ونديرها
على قطر آح نصف دايرة حما ونخرج آب على استقامة الى ز ونصل زح فلان دايرتي
آزح اهد متماستان على نقطة آ تكون نسبة آد الى دح كنسبة آه الى هز من اجل
ان زاويتي اهد آزح قائمتان ومثلثا اهد آزح متشابهان فاه اذن مساو لهز و
لان زاويتي ادح ازح متساويتان وزاوية ادح على مركز دايرة آبح وزاوية ازح على محيطها
تكون زاوية آح ضعف زاوية ازح فزاويتا حزب بزح متساويان وزح مساو لبح وقد كان

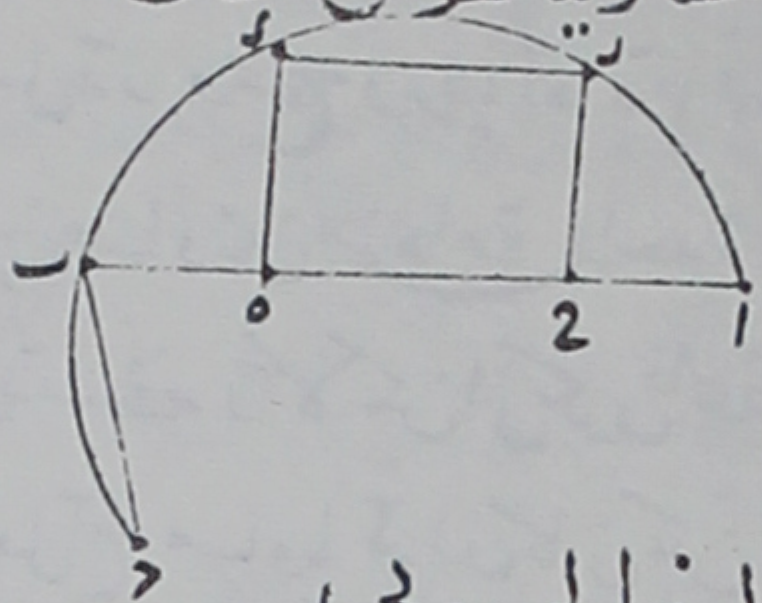


كان مجموع زد دت مساو لهٔ آحت ه مساويان

معا لهٔ آ وذلك ما اردنا ان نبين والله اعلم

برهان ثالث لابي سعيد احمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي

قال يخرج دز موازيا لاب وزح موازيا لدهٔ فقوس دت مساوية لقوس زا وبقي قوسا زد



تح متساويان فوترزد اعني حه مساو لوتر تح وخطا

اح هب مساويان واح مع هح مساو لهٔ تز

مع تح وذلك ما اردنا ان نبين

برهان للقاضي ابي علي الحسين بن الحرث الحبوبي

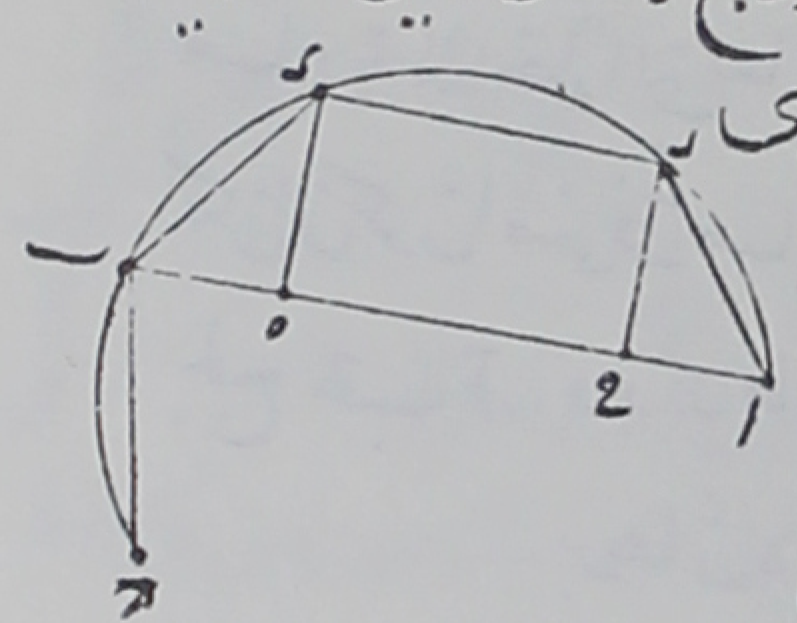
قال نفصل قوس آز مساوية لقوس دت ونخرج عمود دح ونصل آز زد دت فلان

زاويتي زحا دهب قائمتان وزاويتي زاب دبا متساويتان لكونهما على قوسي زد دت

دزا المتساويتين وضلع آب مساو لضلع دب فمثلثا آزح بدهٔ متساويان واضلاعهما

مسارية النظير للنظير فزح مساو لدهٔ وهما متوازيان فزدحهٔ متوازي مساويا

واح هب متساويان وزد تح متساويان لانهما وتران لقوسي



زد تح المتساويتين فحهٔ تح متساويان فمجموع آح حهٔ

مساو لمجموع هب تح وذلك ما اردنا ان نبين

برهان ثان للقاضي ابي علي الحبوبي

قال نفصل هر مساويا لهٔت ونصل دت در ونرسم دائرة آحر ونخرج دز على استقامته

حتى ينتهي الى المحيط على ح ونصل آح حر فلان ده هب متساويان وهٔد

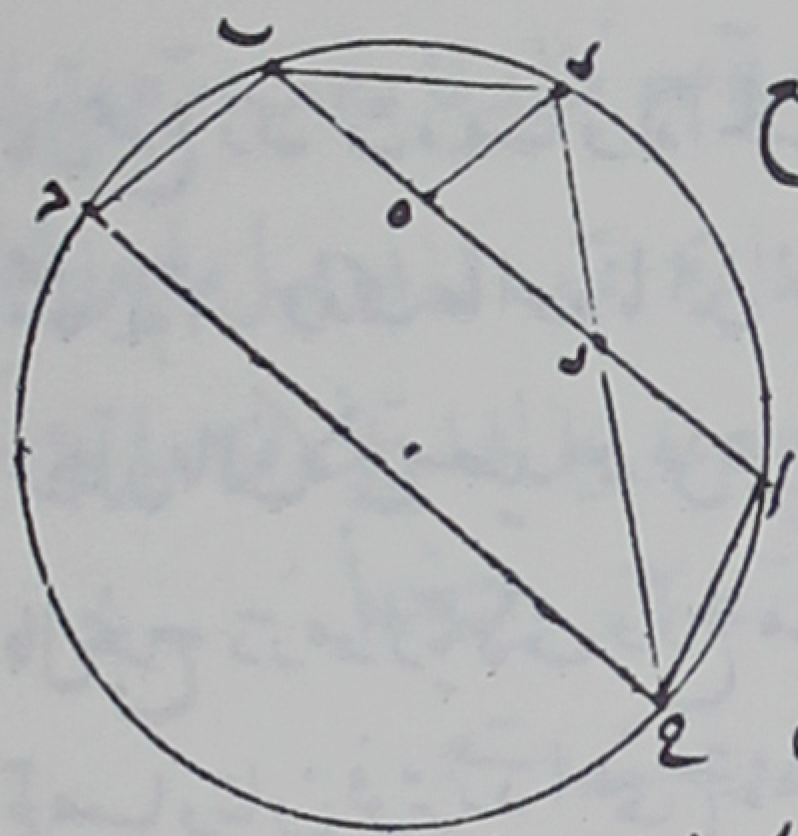
مشترك وزاويتا ه قائمتان يكون زد مساويا لدت فزاويتا دزه دته متساويتان

وزاويتا دزه آرح لاجل التقابل متساويتان وزاوية اح ر مساوية لزاوية دته

لانهما على قوس واحدة فاذن زاويتا احر آرح متساويتان فاح مساو لار وزاويتا

احد دحر متساويتان لكونهما على قوسين متساويتين فزاويتا دحر آرح متساويتان

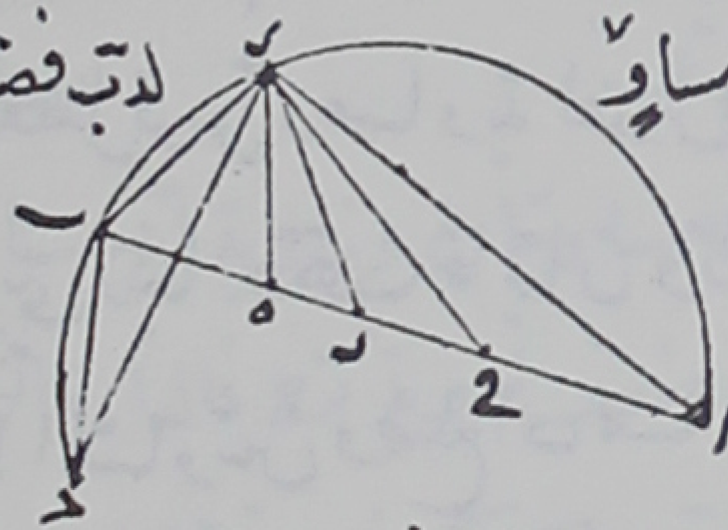
وهما متبادلتان فخط آب مواز لخط حد ففوسا آح تح متساويتان فوترا آح تح



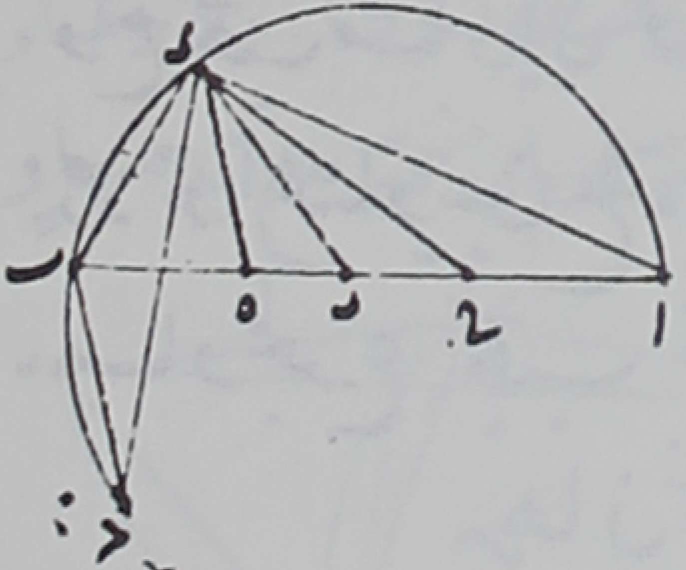
متساويان وقد كان وتر آح مساويا لاز فاز مساو لتح فجميع
آه مساو لمجموع هب بح وذلك ما اردنا ان نبين

برهان لابي نصر منصور بن علي بن عراق

قال نفصل من خط ها خط هز مساويا له ب
ونصل دز ونخرج وتري آد دح فهما متساويان لانهما على
قوسين متساويتين من دائرة واحدة وزاويتا آح متساويتان لانهما على المحيط على قوس واحدة
وهي دب فخط زا لا يمكن ان يكون اعظم او اصغر من تح فان كان يمكن فليكن اولا اعظم
ونجعل آط مساويا لتح ان كان يمكن فلكلي خطي آط آد مساو لكلي خطي حت دح وزاويتا
آت مساويتان فقاعدتا ط د دح متساويتان لان ان زه مساو لدب فضلعا



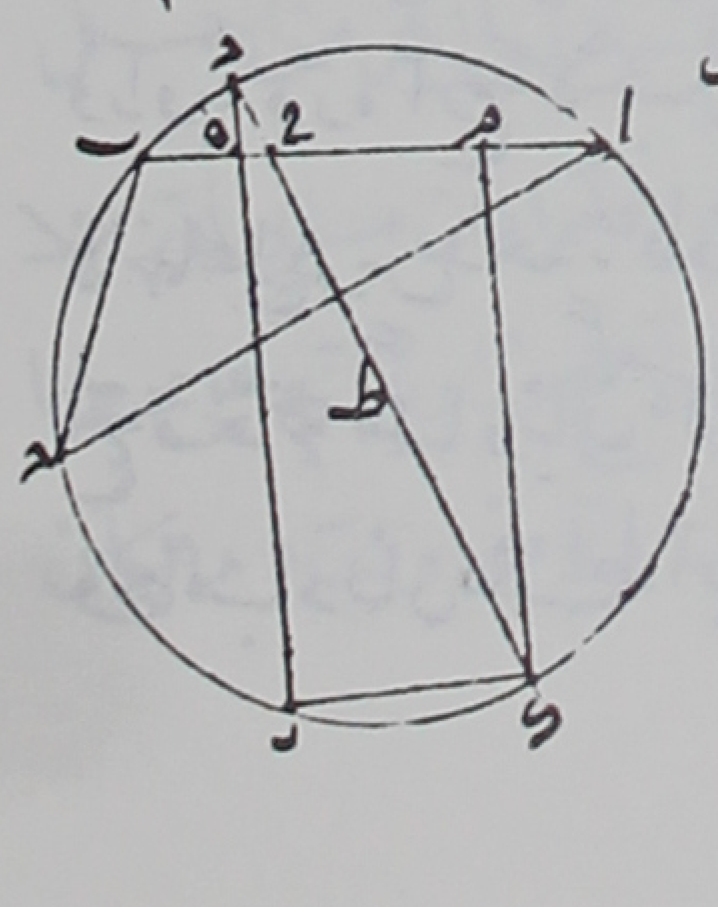
دز دح من مثلث زدح متساويان فزاويتا ح ز فيه
متساويتان وضلعا ط د دح ايضا متساويان فزاويتا
طح في مثلث طدح متساويتان فزاوية دزح مساوية لزاوية دطز فالخارجة من مثلث دطز
مساوية للداخلة التي تقابلها هذا خلف وكذلك ايضا نبين انه لا



يمكن ان يكون اصغر فزا مساو لتح وزه مساو له ب فكل آه مساو
لمجموع هب بح وذلك ما اردنا ان نبين

برهان لابي عبد الله محمد بن احمد الشني

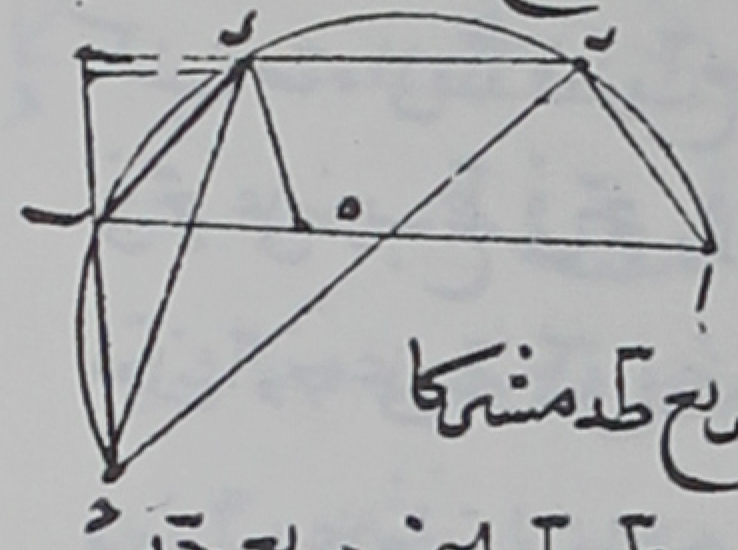
قال نتم الدائرة ونخرج عمود ده على استقامته الى نقطة ز من المحيط ونصل آح ونخرج قطر تح
طاك فيكون عمودا على آح ونخرج حم موازيا لده ونصل حد فزاويتا طاح حده متساويتان
لمشابهة مثلثي طاح دحه فيكون وتر حد مساويا لوتر آح ولان زاوية درد قائمة لانها واقعة
في نصف الدائرة وزاويتا مه قائمتان فسطح تم قائم الزوايا ولذلك
يكون حد مساويا لمه فمه مساو لآح ولان عمود حم مساو
لعمود ده يكون آم مساويا له ت وقد بينا ان مه مساو لتح
فمجموع آم مه مساو لمجموع هب بح وذلك ما اردنا ان نبين



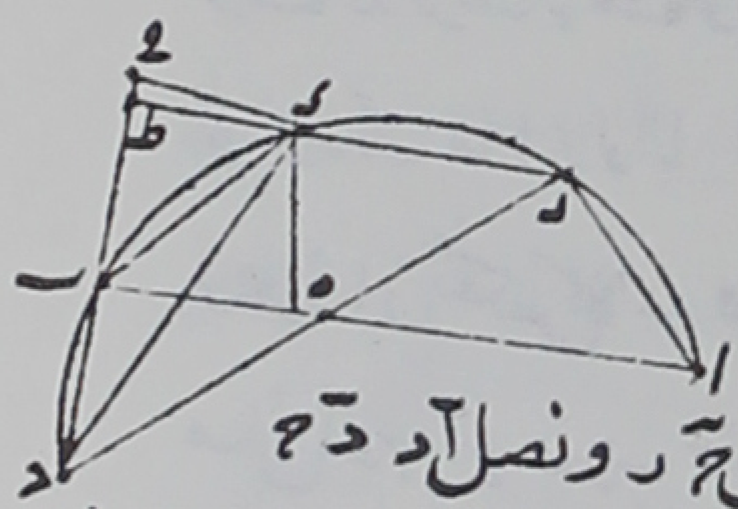
لدب وعمود هط منصف فزه مساو

برهان ثان لابي عبد الله الشني

قال نفصل قوس آر مساوية لقوس جب ونفصل جر ونخرج خط جب على استقامته
الى جهة ب ونجعل جح مساويا لجر ونصل ده دح دا دب در فلان خط جح مساو
لخط جر ودج مشترك وزاويتا جحد دجر متساويتان لانهما على قوسي بد در المتساويين فدح
مساو لدر لكن در مساو لدا فدح مساو لدب ونخرج عمود دط على حب فمعلوم انه يقسم خط
حب بنصفين على نقطة ط فخ ب خط مستقيم قد انقسم
بنصفين على نقطة ط وزيد فيه خط جح على استقامته

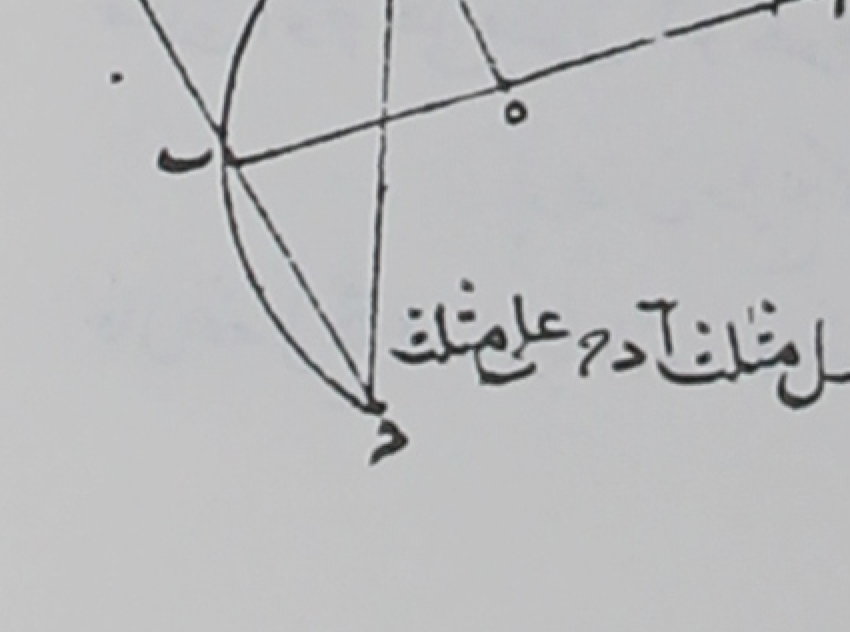


فضرب حج في جب مع مربع بط مساو لمربع طج ونجعل مربع طد مشتركا
فضرب جح في حب مع مربعي بط طد اعني مربع بد مساو لمربعي طج طد اعني مربع جد
لكن با مساو لجح ودا مساو لدج فضرب اب في بج مع مربع بد اعني مربع به هد مساو
لمربع دا اعني مربعي هد ها فنسقط مربع هد المشترك فيبقى ضرب اب في بج مع مربع هب
مساويا لمربع ها لمجموع خطي اب بج اذن منقسم بنصفين على
نقطة ه وذلك ما اردنا ان نبين



برهان ثان لابي الجود ابن استاد جشنس

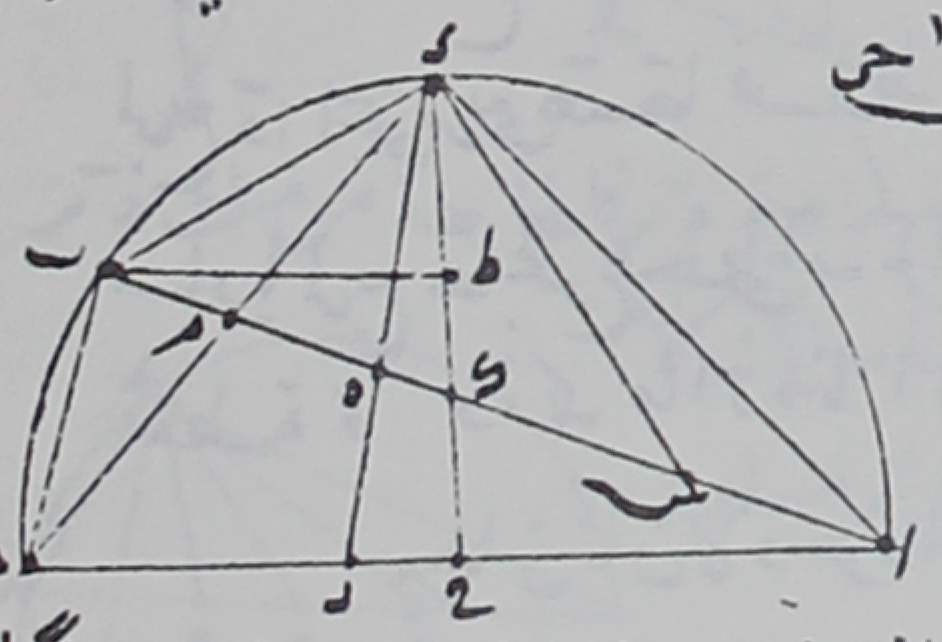
قال نخرج جب على استقامته ونخرج من نقطة ج عمود در على جر ونصل اد دج
فلان في مثلثي درج دها زاويتا درج دها قائمتان وزاويتا رجد هاد متساويتان لانهما
على قوس واحدة فالمثلثان متشابهان وآد مساو لدج ودر مساو لده وجر مساو لها
وبين ان مربعي در رب مساويان لمربعي ده ها ما مربع در فمساو لمربع ده لتساوي الخطين
يبقى مربع رب مساويا لمربع به فهما ايضا في الطول متساويان وقد كان جميع جر مساويا لاه
فخطا جب به المساوي مجموعها لخط جر مساويان لخط
ها وذلك ما اردنا بيانه والله اعلم واحكم



برهان ثالث لابي عبد الله الشني

قال نصل اج ونبين اولا ان ضرب ده في جب مساو لفضل مثلث ادج على مثلث

آج وذلك انا نخرج عمود ده على استقامته الى نقطة ز من قاعدة آج وعمود ادح على آج ونخرج
على دح ونعلم على تقاطع خطي تح آب نقطة ط فلان مثلثي هار طاح متشابهان فزاويتا رده
منهما متساويتان وزاوية دار مساوية لزاوية دبح لأنهما يوتران نصف قوس آج فمثلثا دار دبح
متشابهان فنسبة آر الى ذد كنسبة بح الى حد ونسبة آر الى ر كنسبة آد الى حد وكنسبة
آح الى هد لتشابه المثلثات ونسبة بح الى حد لذلك ايضا كنسبة بد الى طد فنسبة آح الى هد
كنسبة ت ه الى طد فضرب آح في ده كضرب ده في هب وضرب آح في ط هو فضل ضرب دح
في تح على ضرب طح في تح وذلك مثل فضل مثلث آدح على مثلث آح فضرب ده في هب مساو لفضل
مثلث آدح على مثلث آح ونجعل هس مساويا لهب ونصل دس ثم لتسقط آم المشترك فيبقى فضل
مثلث آدم على مثلث ت م ح هو ضرب ده في هب اعني مثلث دسب ولذلك يكون فضل مثلث آدم
على مثلث دح هو مثلث دسم فمثلثا ادس اذن مساو لمثلث دح وضلعا آد دس مساويان لضلعي
حد دب فضلع آس لذلك مساو لضلع تح الثالث من الآخر

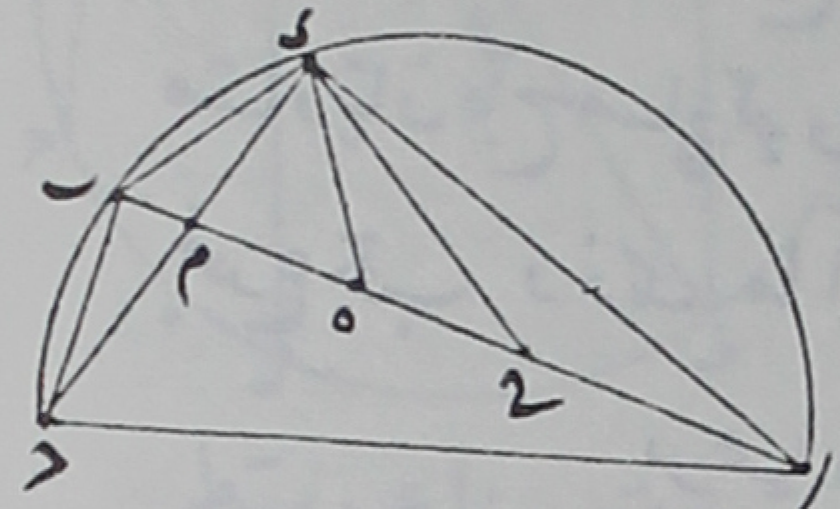


وقد فرضناه مساويا لاب فاه مساو لمجموع هب
تح وذلك ما اردنا ان نبين
ويجوز ان نعكس الامر فيبرهن مساواة فضل ما بين
مثلثي آدح آح ضرب ده في هب من نصف الخط المنحني بالعمود وذلك انا اذا جعلنا هس مساويا
لهب ووصلنا دس دب كانا متساويين ومن قبل ان آه مساو لمجموع هب تح يكون آس مساويا
لتح فيكون آد آس من مثلث ادس مثل كلي دح حب من مثلث دح وزاويتا آح منهما متساويان
وضلعا دس دب متساويان فمثلثا داس دح متساويان ففضل مثلث داس على مثلث ت م ح
هو مثلث دمب يكون فضل مثلث آدم على مثلث تح هو مثلث دسب ومثلث دسب هو مساو
لضرب ده في هب لكن فضل مثلث آدم على مثلث تح هو فضل مثلث آدح على مثلث آح ففضل
مثلث آدح على مثلث آح هو ضرب ده في هب وذلك ما اردنا ان نبين

برهان رابع لأبي عبد الله الشنّي

قال يفصل تح مساويا لاب ونصل دح دب دا دح حا فبين ان دح دب يكونان متساويين

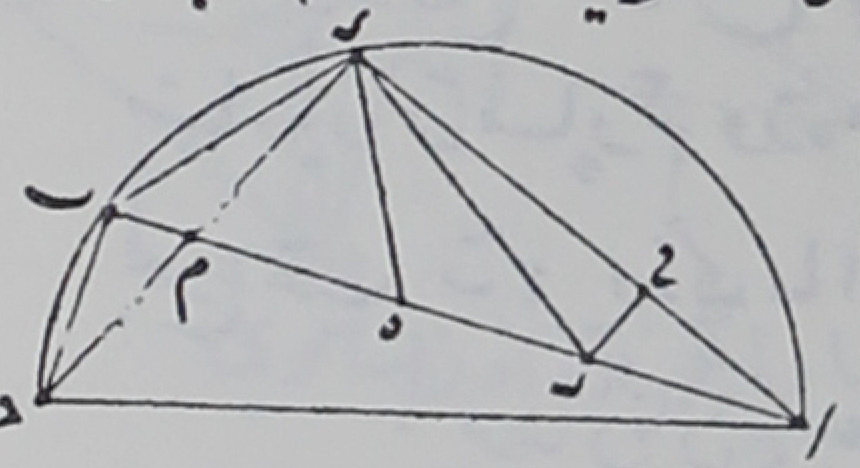
مساوين فثلثا ادح دحب المساويا الساقين زاويتا ح ب فيهما متساويتان لانهما على قوس
واحدة فهما متشابهان فزاويتا ادح حدب اذن متساويتان ونسقط زاوية ح دم المشتركة
فتبقى زاويتا ادح حدب متساويتان وضلعا دا اح من مثلث داح مساويان لضلعي ح د
دب من مثلث حدب والزاويتان اللتان يحيطان بهما متساويتان



فقاعدة اح مساوية لقاعدة ح ب فيكون اح ح ه
مساويا لاب به وذلك ما اردنا ان نبين

برهان لابي نصر منصور بن علي بن عراق

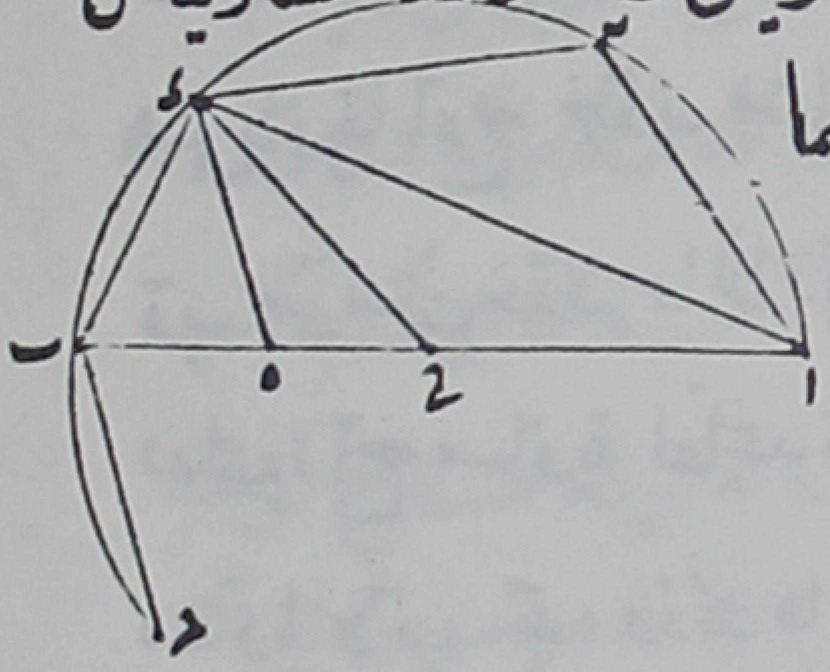
قال نفرض اد مساويا لبح ونصل دز دب فخطا دا در مساويان لخطي دح حب وزاويتا
داب دحب متساويتان لانهما على قوس واحدة فقاعدتا در دب متساويتان فمثلث درب
متساوي الساقين در دب فعمود ده يقسم قاعدة رب بنصفين على نقطة ه فهب متساويان واد
بح متساويان فمجموع ار ره مساو لمجموع هب بح وذلك ما اردنا ان نبين
فان اردنا المعنى الاخر وهو لان ار مساو ا ه ضرب ده في هب اعني مثلث درب فضل ما بين
مثلثي ادح اح فانا نفرض اح مساويا لبح ونصل زب فيكون مثلثا اح د ح مب متساويان
ويبقى مثلثا دح ر دمب متساويان لمثلثات بح بمد دم مساوية لمثلث ادم ونجعل
مثلث اح مشتركا فيكون مثلثا ادم اح مساويان لمثلثات اح



بح بمد دم فيفضل ما بين مثلثي ادح اح هو مثلثا بمد
دم ومجموعهما مساوي ضرب ده في هب وذلك ما
اردنا ان نبين برهان لابي علي الحسن بن الحسين البصري

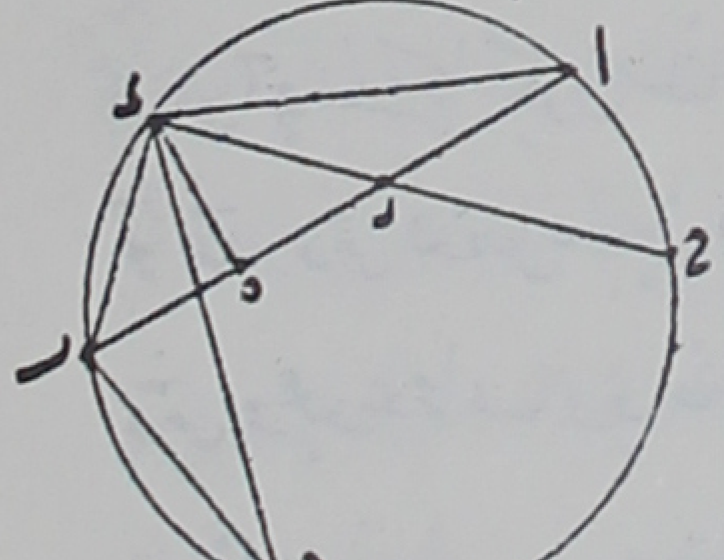
قال نفصل قوس دز مساوية لقوس دب ونصل دب در زا دا ونجعل هج مساويا لهب
ونصل دح فلان قوس دز مساوية لقوس حب يكون زاوية د مساوية لزاوية داب و
لان قوس دب مساوية لقوس دح يكون زاوية ده مساوية لزاوية دحه ولان شكل
دزا دوا اربعة اضلاع في دايرة يكون زاويتا ازد اده مساويتان لقائمتين و [illegible] بين ان
زاويتا اده مساوية لزاوية دحه وزاويتا ازد دحب مساويتان لقائمتين ويكون زاويتا

دح ب دح ا مساويتان لقائمتين فزاويتا آ ر د آ ح د متساويتان وقد كانت زاويتا ر آ د
ح آ د متساويتان وخط آ د مشترك فمثلثا آ ر د آ ح د متساويان واضلاعهما متساوية كل
واحد لنظيره فر ا مساو لا ح لكن آ د مساو لا ب لان قوسيهما
متساويتان فا ح مساو لـ ه ح و ح ه مساو لـ ه ت فا ه مساو
لمجموع هـ ب وذلك ما اردنا ان نبين



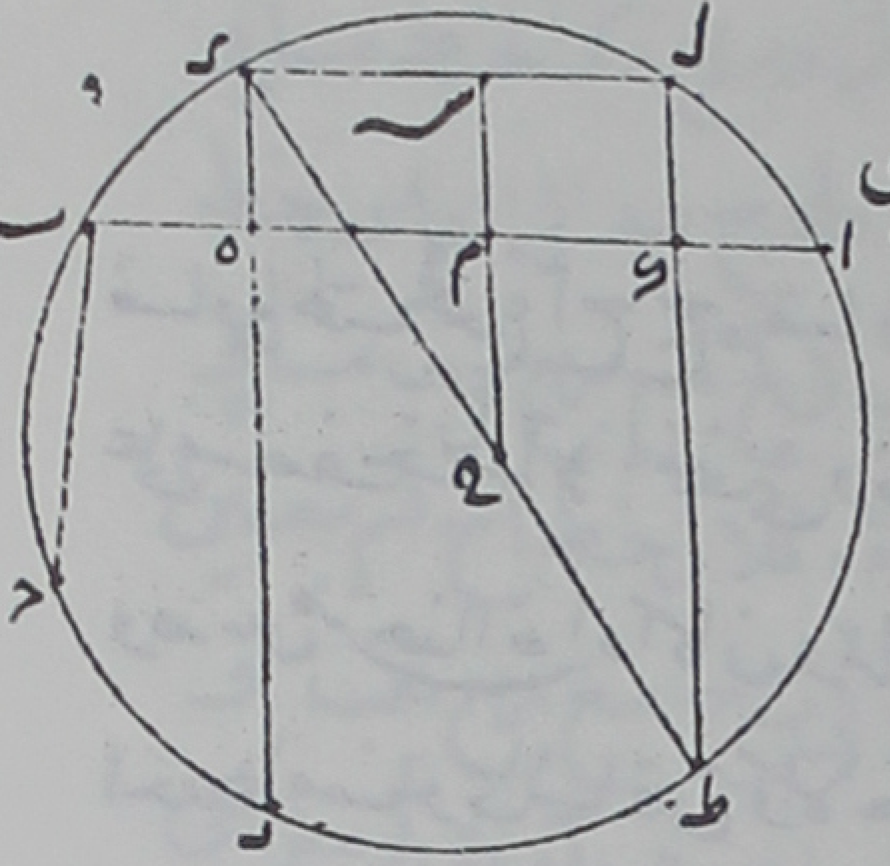
برهان لي على ذلك

فلتتم الدائرة ونصل د ب د ح د ا ونجعل ه ر مساويا لـ ه ب ونصل د ر ونخرجه على استقامته حتى يلقى المحيط على نقطة ح فلان آ د د ح متساويان لانهما وترا قوسين متساويين و د ب د ر متساويان لتساوي مثلثي د ب ه د ر ه وزاويتا ح د ب آ د متساويتان لانهما على المحيط مركبتان على قوس واحدة وزاويتا د ح ر د ا متساويتان من اجل ان زاوية د ر ب مساوية لزاويتي ر د ا ر آ د لكن زاويتي د ب ر د ر ب متساويتان وزاوية د ب ر مساوية لزاويتي د ا ر آ د وزاوية د ب ر مركبة على نصف القوس المعطاة وزاوية ر آ د قوس د ب من النصف الباقي فبقي زاوية ر د ا بمقدار تمام قوس د ب الى النصف المعطى وهو ح ح لكن زاوية ر د ا على قوس ا ح فقوسا آ ح ح ح متساويتان وزاويتا د ح ر د ا متساويتان فالمثلثان متساويان متساويان فر ا مساو لـ ح ح و ر ه مساو لـ ه ب فمجموع آ ر ر ه مساو لمجموع هـ ب ت ح وذلك ما اردنا ان نبين

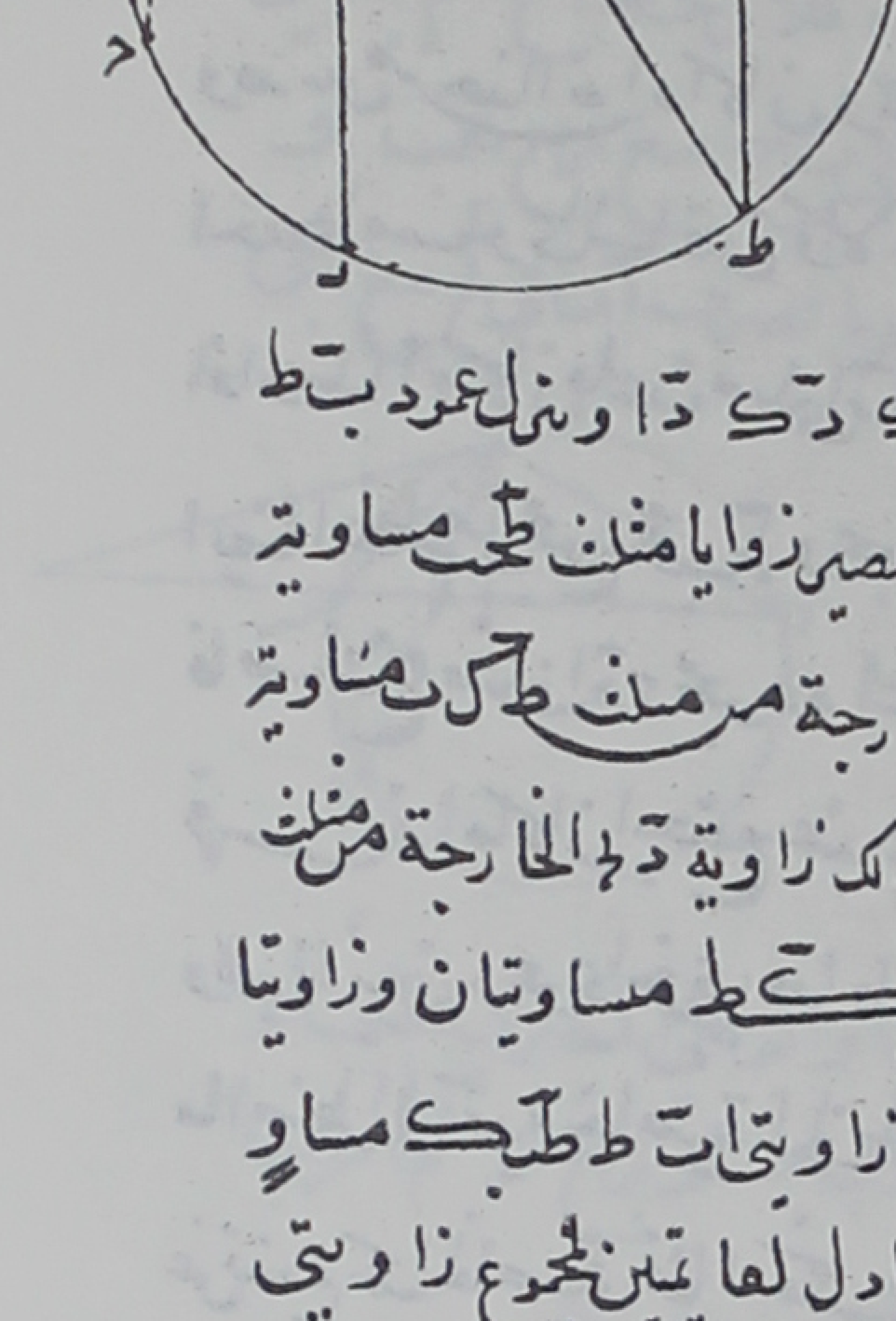


برهان ثان لي على ذلك

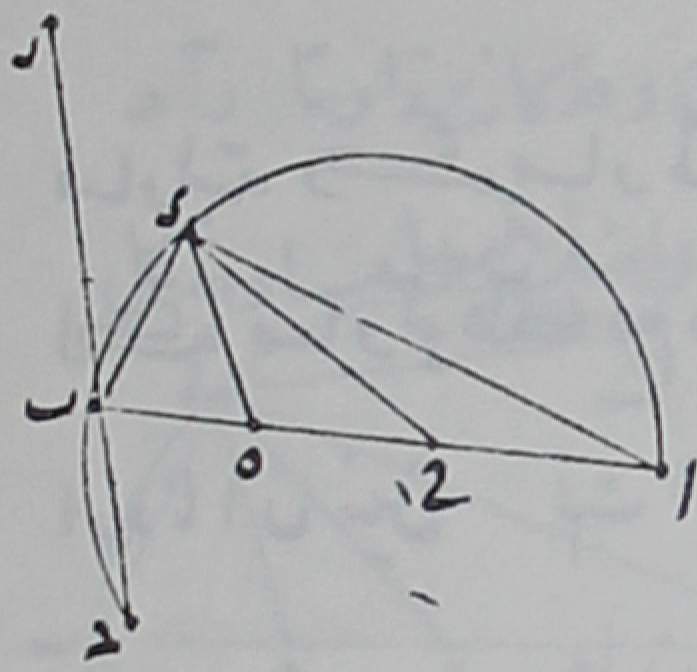
فلتتم الدائرة ونخرج عمود د ه على استقامته الى المحيط ونخرج قطر د ح ط ونخط ط ك ل موازيا لـ د ه فلان د ر ط ل متوازيان وخارجان من طرفي قطر د ط يكون قوسا د ح ر ط ا ل متساويتان ونصل ك د فتكون زاوية د ك ط قائمة لانها في نصف الدائرة وزاويتا ل ك د ه د ك قائمتان فسطح ك ه قائم الزوايا متوازي الاضلاع فك د مساو لـ ك ه ونخرج من ك ر ح خط ح م س موازيا لـ د ه فيستقطع كل واحد من وتري آ ب ك د على زوايا قائمة وهو اذن يقطعهما بنصفين نصفين فك س مساو



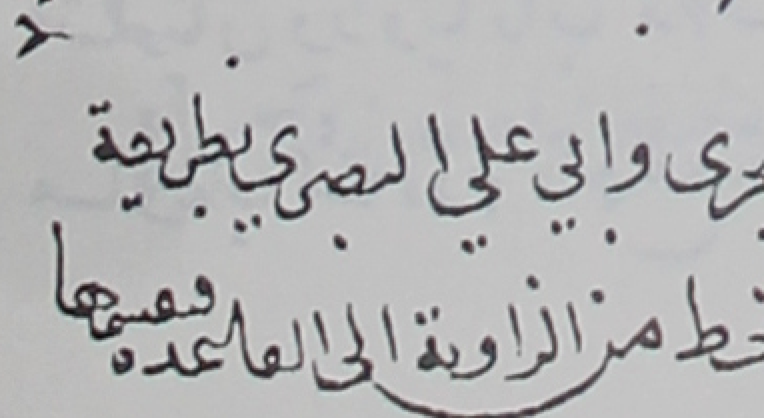
مساو لسد وكـ مساو لمه فسنى آد مساويا لهت وكد المساوي
لكه مساو كح فلكد مع كه مساو لهـ مع كح وذلكما
اردنا ان نبين تمت البرهان الثاني بلى
برهان ثالث لي على ذلك في كتابي في
المسايل المفيدة والجوابات السديده
قلت يخرج اب على استقامته ويجعل بد مساويا لكح ونصل حد دك دا ونبزل عمود بط
على حد فهو ينصف قاعدة حك لتساوي ساقي حب كب ونصير زوايا مثلث طحب مساوية
لزوايا مثلث طكب كل واحدة نظيرتها فلان زاويتي اط الخارجة من مثلث طكب مساوية
لزاويتي بكد طكد الداخلتين اللتين تقابلانها ولمثل ذلك زاوية دكح الخارجة من مثلث
كح تساوي زاويتي بحط حكط الداخلتين لكن زاويتي كحط بكط مساويتان وزاويتا
كطح كبط قائمتان فزاويتا اط دكح متساويتان ومجموع زاويتي اطب طبك مساوٍ
لمجموع زاويتي دكح حكط الا ان مجموع زاويتي اطب طبك معادل لقائمتين فمجموع زاويتي



دكح حكط ايضا معادل لقائمتين فخط دكط خط واحد مستقيم
وهو قد بين عمود دكح وقاسم قاعدته بنصفين فخطا دح دك
متساويان وخطا دا دح متساويان فاد يساوي دك فعمود
ده ينصف اك فاه مساو لهب بك لكن بك فرض مساويا لكح فاه اذن يساوي
هب كح وذلك ما اردنا ان نبين برهان رابع لي استعملته في علل زيج حبش
قلت نفصل هح مساويا لهب ونصل دح دب فيكون مثلثا دهب دهح القائمي الزاويتين ه
متساويين ودب مساويا لدح ثم نصل اد دح ونخرج حب على استقامته الى ح فلان زاوية
دحا على قوس داح تكون تمامها الى القائمتين وهو زاوية دحر بمقدار قوس حا المساوية
لقوس د التي عليها زاوية دحا فزوايا دحا دبر دحه متساوية وبقي زاويتا دحا دحا
متساويتان وزاويتا داب دحب على قوس واحدة فبقي زاويتا ادح مدح متساويتان ودح
مساو لدب فمثلثا ادح دحا مع تشابههما متساويان فاح مساو كح وقد كان فرض هح مساويا

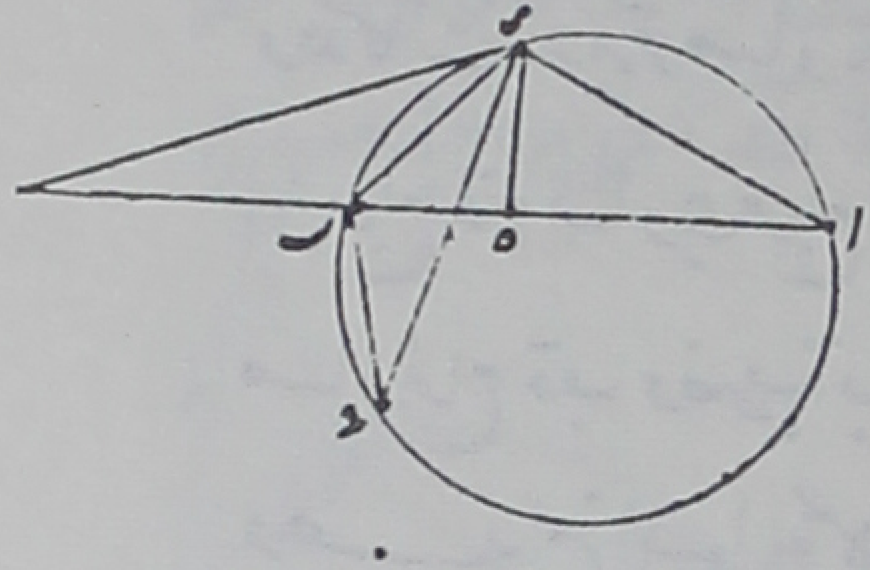


مساويا لمجموع اح حه مساو لمجموع حد ده فنقطة ه اذن
على منتصف خط اح المنحني وذلك ما اردنا ان نبين ه
وقد تبين من هذا انه اذا كان وتر قوس قاعدة لمثلثين فيها
احدهما متساوي الساقين والآخر مختلفهما ان احاطة الاول اعظم من احاطة الثاني لانا
اذا وصلنا اح كان قاعدة مثلثي ابح المساوي الساقين وادح المختلفهما واب اعظم من اه فدح
ايضا اعظم من مجموع هب بح ونجعل اح مشتركا لمجموع اد دح اح اعظم من مجموع اه هح اح
فاضلاع مثلث ادح مجموعه اعظم من اضلاع مثلث اهح وذلك ما اردنا
فهذا ما كان اجتمع عندي من طرق الفضلاء في اقامة البرهان على صحة هذه الدعوى
ولليونانيين دعوى اخرى قد اقام هؤلاء المبرزون في الصناعة براهين على صحتها منها
ما اضطر الى تقديم خاصية الخط المنحني في القوس فصار لذلك من توابعها ومنها ما استغنى
عن تقديم تلك الخاصية فلما انعكست وامكن فيها تصحيح تلك الدعوى الاولى صارت لذلك من
مقدماتها واذا انتهينا الى ذلك عند تعديد ما لهم من البراهين اتبعناها ومرنا بين المقدمة
والتابعة وهذه هي الدعوى الاخرى اذا انحنى في قوس من دائرة خط فقسم القوس
نصفين وانحنى في تلك القوس ايضا خط اخر فقسمها بقسمين مختلفين فان ضرب احد قسمي الخط
المنصف للقوس في الآخر يساوي ضرب احد قسمي الخط القاسم للقوس بقسمين مختلفين في الآخر
مع مربع وتر ما بين نقطتي انقسام القوس بهما مثال ذلك قوس اح قد انحنى فيها خط ابح
فقسم القوس بنصفين على ب وانحنى فيها ايضا خط ادح فقسمها بقسمين مختلفين على د
اقول ان ضرب اد في دح يساوي ضرب اب في بح مع مربع دب وكل واحد من هؤلاء قد خفف
ثقل هذه الموامرة وقصر طولها فخرجت على هيئات مختلفة كما سا
حكيها عنهم ان شاء الله تعالى



برهان عليها وجدته في المسائل التي ترجمها يوحنا بن
يوسف من اليوناني الى العربي واتفق مثله بعينه لابي سعيد السجزي وابي علي البصري بطريقة
واحدة ليكن مثلث متساوي الساقين يخرج فيه خط من الزاوية الى القاعدة فيقسمها

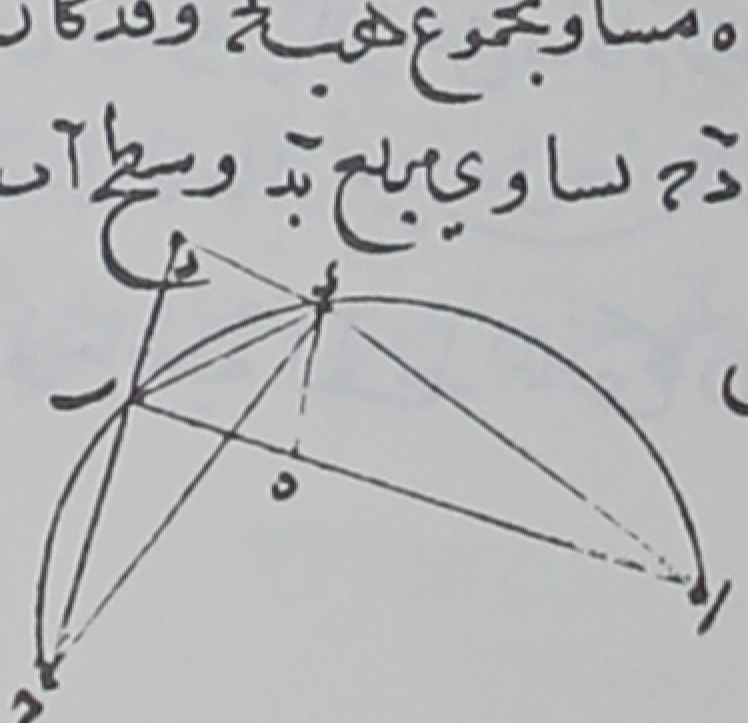
فقسمها بقسمين مختلفين فان ضرب احد القسمين المختلفين في الآخر ومربع ذلك الخط مساوٍ
لمربع احد الساقين   فليكن مثلث آدج متساوي ساقي آد آج ولنخرج فيه الى القاعدة خط
دب كيف اتفق بعد ان لا يكون عمودا عليها فاقول ان ضرب آب في بج مع مربع دب مساوٍ
لمربع آب برهانه انا نديرعلى مثلث آدب دائرة ونخرج عمود ده فلان خط آج قسم بنصفين
على ه وبقسمين مختلفين على ب يكون مربع آه مساويا لضرب آب في بج مع مربع هب و
نجعل مربع ده مشتركا فيكون مربعا آه هد اعني مربع آد مساويا لضرب آب في بج مع مربعي



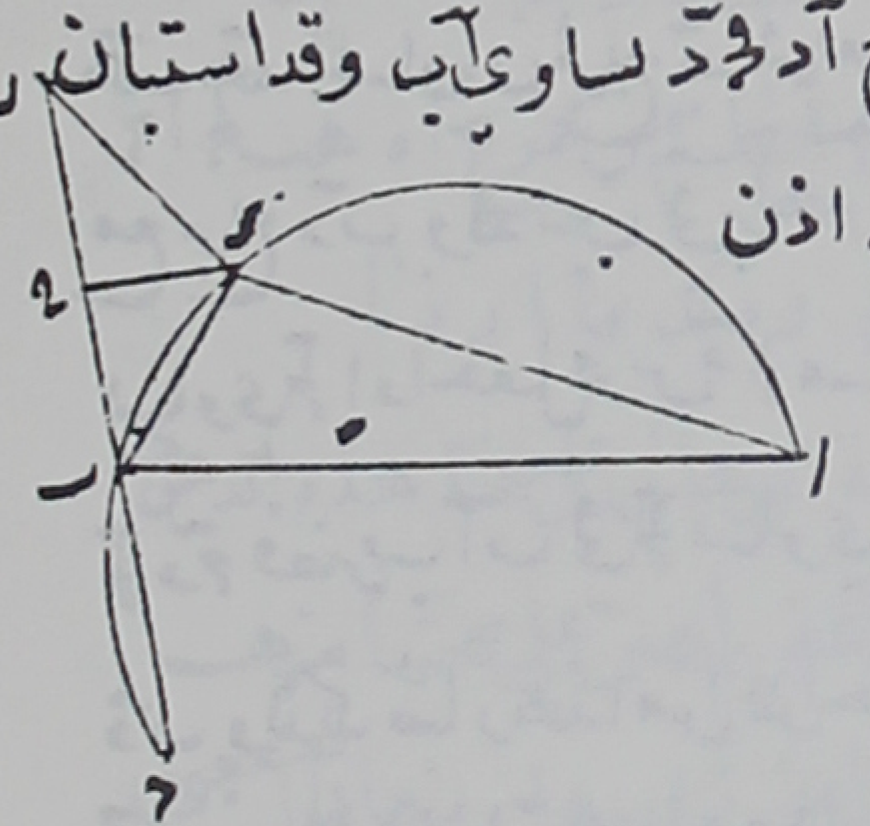
هب هد المساويان لمربع بد فمربع آد مساوٍ لضرب آب في بج
مع مربع دب وقد تبين في برهان الدعوى الاولى ان آج
مساوي بح اذا جعل قوس بح مساوية لقوس آد ووصل
بح دح فضرب آب في بج مساوي ضرب آب في بح مع مربع
دب ولذلك صار هذا من اللواحق واما ابو سعيد السجزي وابو علي البصري فجعلا
آج منحنيا في قوس آدج وادعيا ان ضرب آب في بج مع مربع دب مساوٍ لمربع آد ثم اخرجا
للبرهان بح وجعلاه مساويا لبح ثم ساقا البرهان كما تقدم بعينه

برهان عليها لابي نصر منصور بن علي بن عراق

او نقول ان ضرب آب في بج ومربع دب يساوي مربع آد برهانه انا نخرج بح
من نقطة ب على استقامته ونخرج دز عمودا عليه ولذلك نخرج ده عمودا على آب ونصل
دب آد دح فلان زاوية آدح بمقدار تمام قوس آدح الى تمام الدائرة تكون زاوية آزد بمقدار
آدح ولذلك زاوية هبد مساوية لزاوية دبز لان قوس آد مساوية لقوس بح وضلع دب
مشترك لمثلثي بدز بده وزاوية ه قائمة كما ان زاوية ز قائمة فبز يساوي به و دح تقوي
على حز زد و بد تقوي على دز زب فحد تقوي على بد وزيادة قوة حد على قوة بز وتلك
الزيادة هي مربع حب مع ضعف بز في بح وآه مساو لمجموع هب بح وقد كان تبين ان هب
يساوي بز فآب يساوي بح وضعف بز فمربع دح يساوي مربع بد وسطح آب في بح وذلك ما
اردنا ان نبين   وهذا من اللواحق

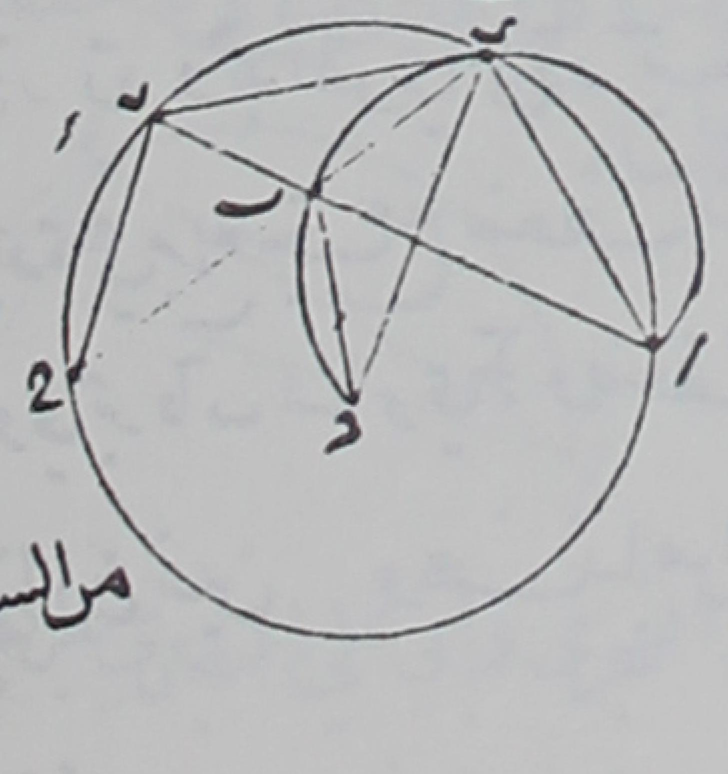


لاخذ مساواة آه مجموع هب بح مسلما من غير برهان   برهان ثان لابي نصر منصور بن
علي بن عراق عليها قال يخرج حب من نقطة ب على استقامته ونخرج دح عمودا على بح
ونجعل حه مساويا لبح ونصل ده فلان مربع ده مساو لمربع دح حه ومربع دب مساو لمربعي
دح حب فان مربع ده مساو لمربع دب ومربع به وضعف به في حب لكن حه يساوي حب
فمربع ده مساو لمربع دب وسطح زح في حب جميعا ولان زاوية ح تساوي زاوية آ وخط دب
قد قسم زاوية آبز بنصفين وزاوية ه تساوي زاوية دبح وزاوية آبد تساوي زاوية حزد
وقد كانت زاوية ح مساوية لزاوية آ وضلع دح مساو لضلع آد فخط ده يساوي آب وقد استبان



ان مربع ده يساوي مربع دب وسطح زح في حب فمربع آد اذن
مساو لمربع دب وضرب آب في بح وذلك ما اردنا ان نبين
وهذا من السوابق لاستغنائه عن خاصية الخط
المنحني وبانيه لان برهن بها على تلك الخاصية
برهان ثالث لابي سعيد السجزي عليها

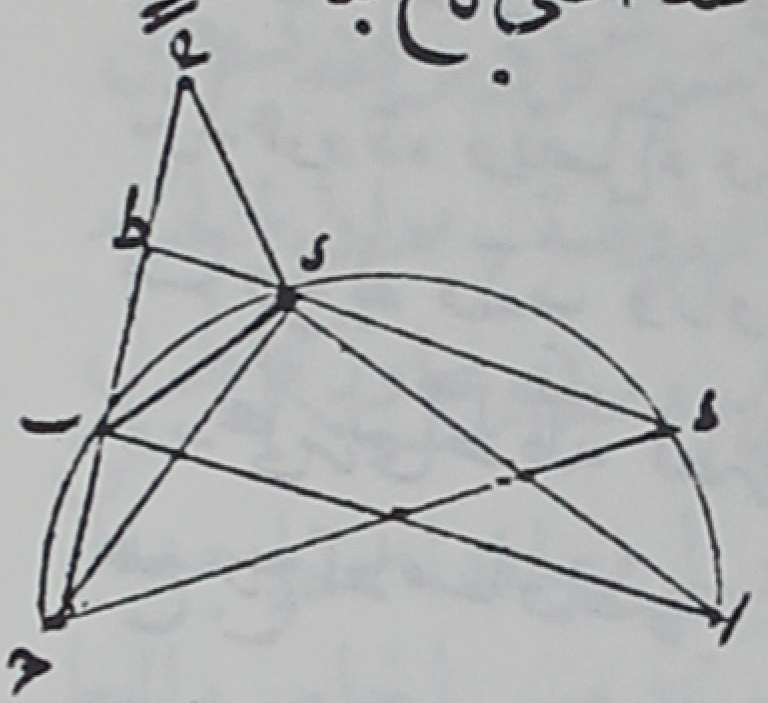
قال يخرج آب على استقامته حتى يكون مثلث آدز متساوي ساقي آد دز كما تقدم وندير
على مثلث آدز دائرة تحيط به ونخرج دب على استقامته الى ح من محيط الدائرة ونصل زح
وضرب آب في بز مساو لضرب دب في بح ولكن دب في بح ومربع دب مساو لضرب بح
في دح ولكن دب في دح ومربع دب مساو لضرب دح في دب ولان زاويتا دبا دحز من
مثلثي دبز دحز متساويتان لانهما على قوسي آد دز المتساويين وزاوية د مشتركة
لهما يكون مثلثا دبز دحز متشابهان واضلاعهما متناسبة فنسبة دح الى دز كنسبة دز الى دب
فدح في دب مساو لمربع دز لكن دح في دب مساو لآب في بز ومربع دب وآب في بز المساوي
لبح مع مربع دب مساو لمربع آد المساوي لدز وذلك



ما اردنا ان نبين وهو من اللواحق ما دام لو حد فيه
مساواة بز لبح مسلما فاما اذا برهن بمثل ما تقدم
ثم يسلق منه الى خاصية الخط المنحني كان حينئذ
من السوابق

السوابق — برهان عليها لابي عبد الله الشني

قال نعمل قوس آر مساوية لقوس بج ونصل جر ونخرج خط جت على استقامته في جهة
ت ونعمل خط تح مساويا لخط جر ونصل دح ونخرج دط عمودا على تح فلان خط
تح مساو لخط جر وخط جد مشترك فكلا تح جد مساو لكلا جر جد وزاويتا تجد
دجر متساويتان لانهما يوتران قوسي بد در المتساويين فجد مساو لدر لكن در مساو لدب
فحد مساو لدب ودط عمود على تح فطح مساو لطب فخط تح خط مستقيم قسم بنصفين
على نقطة ط وزيد فيه خط تج على استقامته فضرب تج في تب ومربع بط مساو
لمربع طج ونجعل مربع دط مشتركا فضرب تج في تب مع مربعي تط طد اعني مربع تد مساو
لمربعي جط طد اعني مربع جد لكن آب مساو لجح فضرب



آب في بج ومربع بد مساو لمربع جد وذلك ما اردناه
وهذا من السوابق ولاستغنائه عن تلك الخاصية

برهان عليها لي

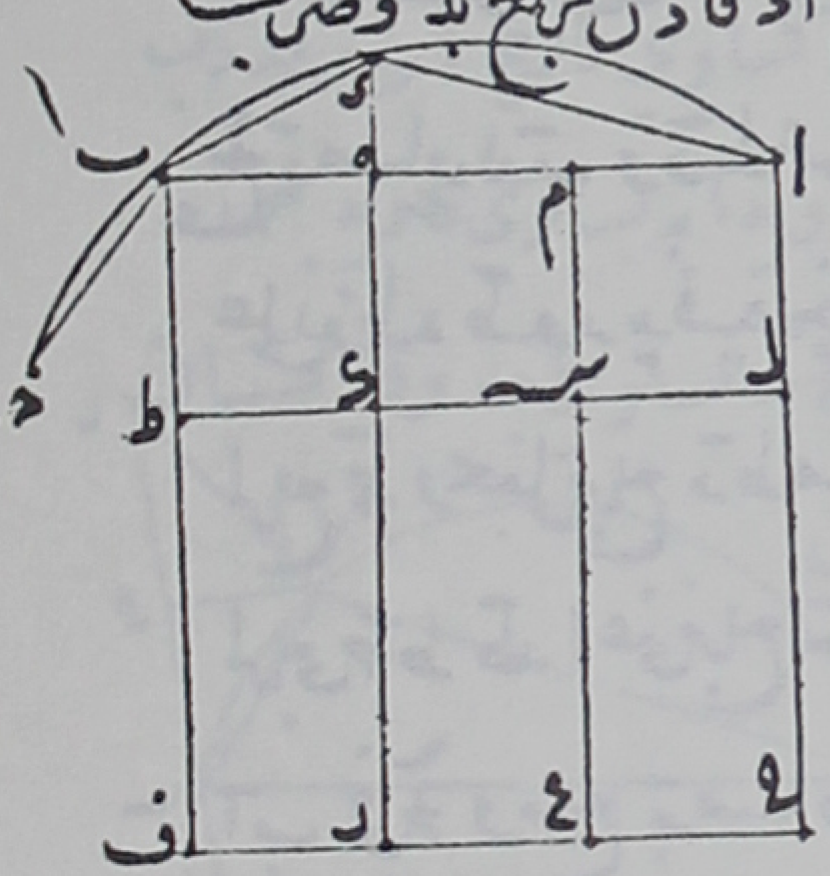
فلنخرج دح موازيا لآب ونصل آج آد دح ت بد فلان قوس آد مساوية لقوس دح
وقوسا آح دب متساويتان بقي قوس تجد مساوية لقوس بج فوتراهما متساويان و
لان ذا الاربعة اضلاع آح دب في دائرة يحيط بها يكون ضرب آد في حب مساويا لمجموع

ضرب حد في آب وضرب آج في دب لكن دح مساو لبج وآد
حب متساويان وآح دب متساويان فاذن مربع آد مساو
لضرب آب في بج اعني جد ومربع دب وذلك ما اردناه ان
وهذا ايضا من السوابق لمثل ما تقدم

برهان ثان لي عليها

فلنتنزل عمود ده على آب ونتمم على خط آه مربع آر وعلى خط هب مربع هط و
نخرج طه على استقامته الى ل ونجعل هم مساويا لهب ونخرج مسح موازيا
لهر ونتمم سطح آح فظاهر ان تما مساو لبج وانه اعني تما فصل ما بين قسمي قاعدة مثلث آبد

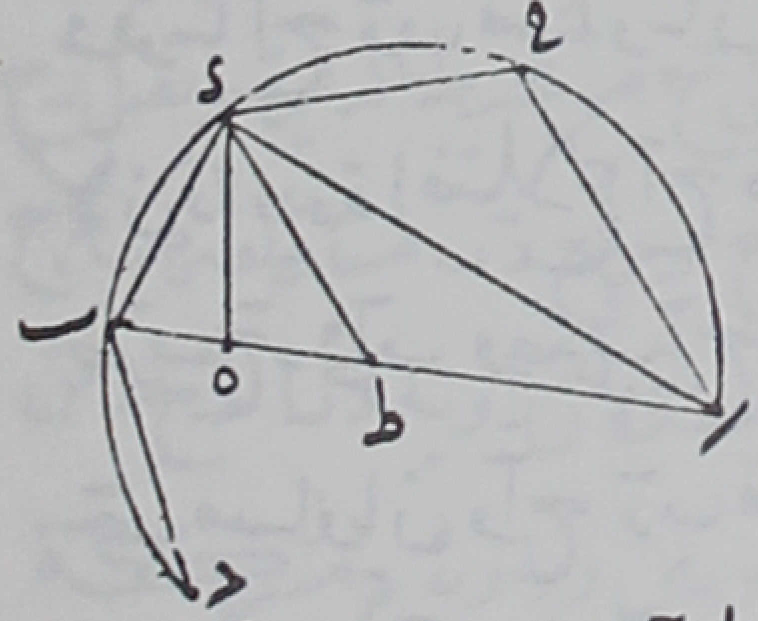
اللذين هما آه هب وظاهر ايضا ان تما مساو لكر ولذلك سطح كف مساو لسطح تمل
لساوي طك تس وان سطح تح هو مربع آر منقوصا منه مربع تب اعني مربع هس وهذا
السطح اعني طح هو ضرب كط المساوي لاب في طف المساوي لما الذي هو مساو لح فاذا زدنا
عليه مربع تد كنا كانا زدنا فيه مربع تب اعني مربع هس فتم مربع هح ثم زدنا على
الجملة مربع هد تكن مجموع هد ومربع هح الذي قدتم مساوي مربع آد فاذن مربع بد وضرب



آب في تح مساوي مربع آد وذلك ما اردنا ان نبين
وهذا من اللواحق لاضطراره الى تلك الخاصية

برهان ثالث لي عليها من غير حاله علي المجسطي

ننزل عمود ده ونصل آد ونخرج دط موازيا لح فتكون
مساوية له ولدب وزاوية دطا منفرجة لمربع آد
ابرد على مربعي آط طد بضرب آط في طب اعني في طه مرتين لكن ضرب آط في طب
مع مربع آط مساو لضرب تا في آط فمربع آد اذن مساو للمجموع مربع دب المساوي لدط اعني
ضرب دب في حا وضرب تا في آط اعني مربع آط وضرب طه في طا مرتين لكن آط مثل ح ده
وح د مثل لح فمربع آد مساو لمربع دب وضرب آب في بح
وذلك ما اردنا بيانه وهذا من السوابق



برهان رابع لي عليها

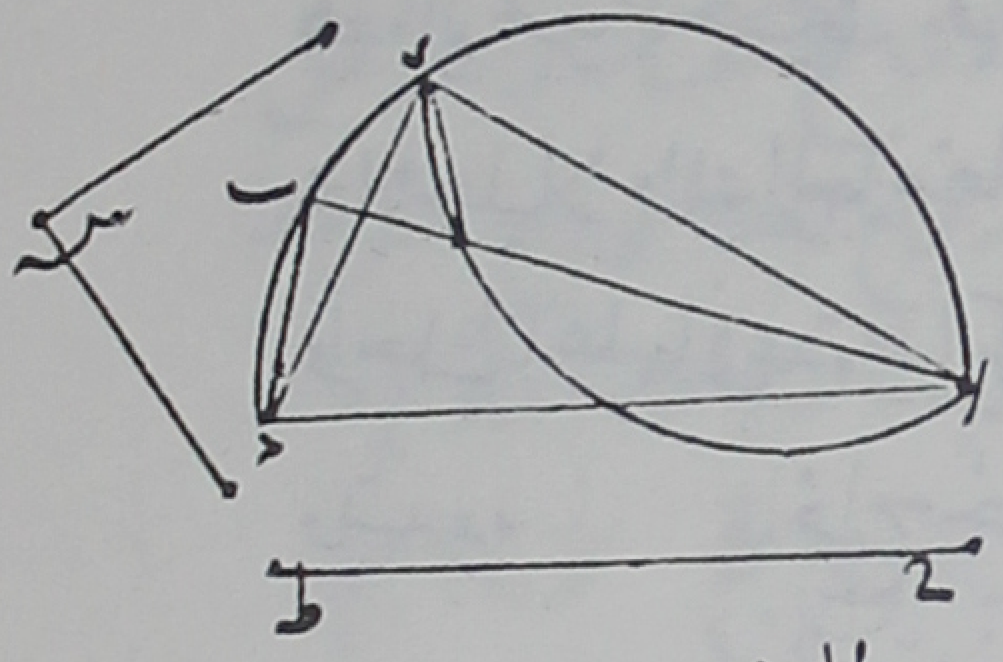
فلت ننزل ده عمودا على آب ونفرز هم مساويا لهب
فيكون تم خطا مستقيما قسم بنصفين على ح وزيد فيه خط ما على استقامته فضرب
تا في آم مع مربع هم مساو لمربع آه ونجعل مربع هد مشتركا فضرب تا في آم مع مربع هم
اعني تم ومع مربع هد مساو لمربع آه مع مربع هد لكن تد نقوي
على ده هب وآد نقوي على آه هد فضرب تا في آم ومربع
تد لساوي مربع آد وذلك ما اردنا ان نبين وهذا
ايضا من اللواحق لما ذكرنا ذكره فهذا ايضا ما لهم من البراهين على هذه

KASHMIR UNIVERSITY
Iqbal Library
Acc. No

هذه الدعوى الاخيرة ولقد حل هذا ان الشكلان من الاصول الهندسية محلا حليلا والت اليهما منها اسباب عظيمة القدر ما سنح اوليك منهما نتايج شتى واحلت انا عليهما في عدة مسايل كتب سئلتها وسأذكرها منها ما اذكره بعون الله وتوفيقه وتسديده

اخراج خطين من نقطتين مفروضتين يحيطان بزاوية مفروضة وتساوي مجموعهما خطا مفروضا

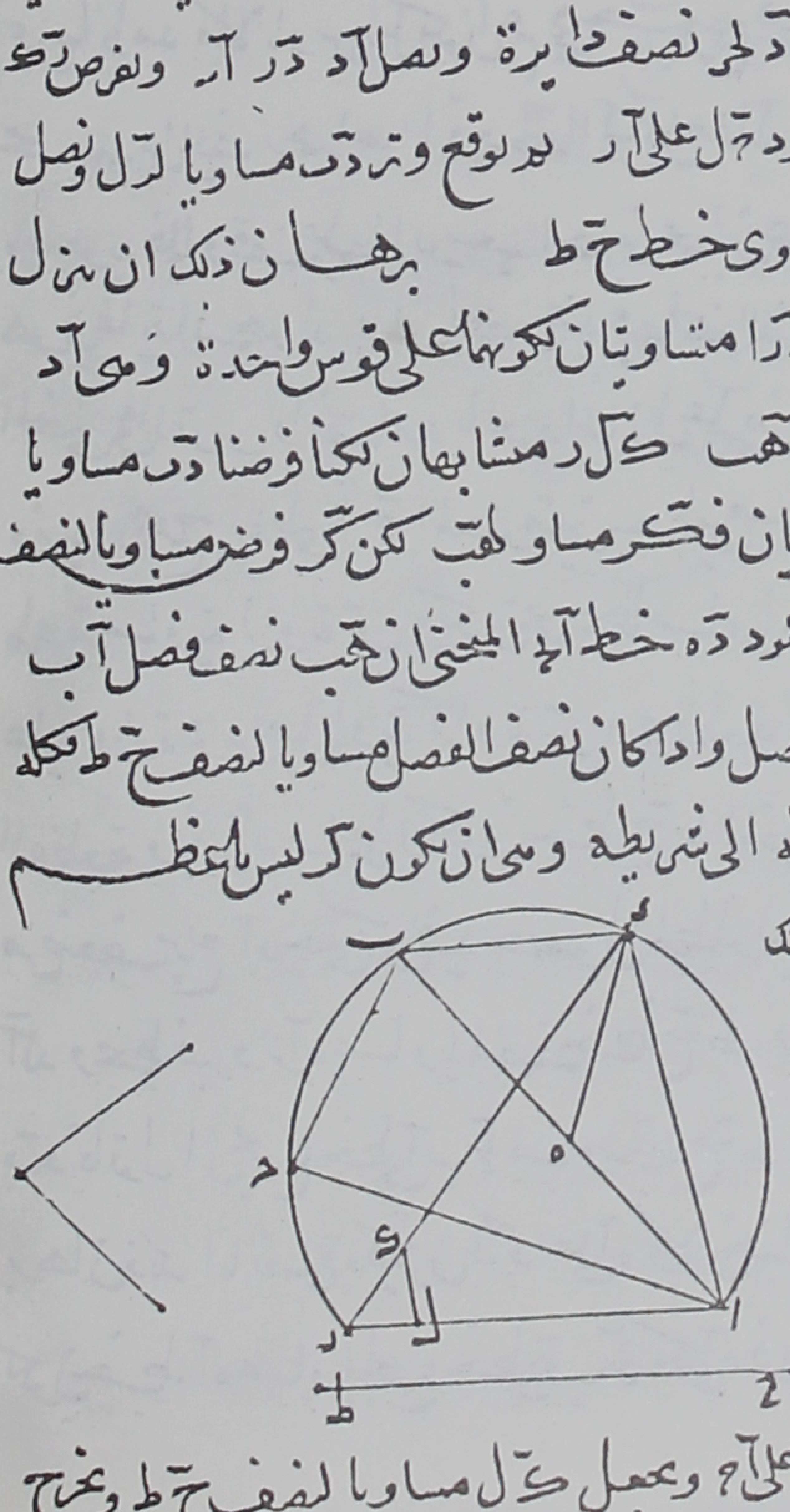
ان مالاناوس رام في الشكل الثاني من المقالة الثالثة من كتابه في الاصول الهندسية ان يبين كيف يعطف في نصف دايرة مفروضة خطا منعطفا مساويا لخط مفروض فسلك اليه مسلكا طويلا جدا ثم عمله ثابت بن قرة حين فسر هذا الكتاب بعمل في طول عمل مالاناوس واما بعد تقديم ما تقدم من خاصية الخط المنحني في تقعيب كل قوس فقد يسهل عمل ما رامه مالاناوس بل يكون اعم في جميع قسي الدايرة المفروضة ثم ان ابا الجود محمد بن الليث رحمه الله افرد لهذا الشكل مقالة واستخرجه بطريق يجاوز كل طول وصعوبة فلما وقف عليها ابو سعيد احمد بن محمد بن عبد الجليل بهاله استخراجه بطريق هو في غاية السهولة ولن نقتصر عند فيها هذا الذي شرح اليه بحصول خاصية الخط المنحني في القوس وانقسامه بالعمود النازل عليه من منتصف تلك القوس وهذا هو المطلوب ونريد ان يخرج من نقطتي آ ج المعلومتين خطين مستقيمين يجتمعان عند نقطة ويحيطان بزاوية مساوية لزاوية س ويكون مجموعهما مساويا لخط ح ط المفروض فضل آ ج ونعمل عليه قطعة قوس يقبل زاوية كزاوية س وهي قطعة آ د ج ولتكن نقطة د منتصف هذه القطعة ونصل آ د ونسعى ان يكون خط ح ط المفروض اعظم من آ ج وليس باعظم من ضعف مربع آ د حتى يمكن فيه حصول المطلوب ثم نديرعلى آ د نصف دايرة آ ك د ونحط فيه وتر آ ه مساويا لنصف خط ح ط ثم نخرجه على استقامته الى ب ونصل ب ج فاقول ان مجموع خطي آ ب ب ج مساو لخط ح ط وزاوية آ ب ج مساوية لزاوية س برهان ذلك انا نصل د ه فيكون عمودا على آ ه ولان هذا العمود نازل من منتصف قوس آ د ج يكون خط آ ه مساويا لمجموع خطي ه ب ب ج لكن آ ه فرض مساويا لنصف ح ط فمجموع ه ب ب ج



مساو لنصفه الاخر فجميع خطي آب بج مساو لخط ح ط كله
وزاوية آبج مساوية لزاوية س لانها عملت في
قطعه قوس تقبل زاوية مساوية لها وذلك
ما اردنا ان نبين

اخراج خطين من نقطتين مفروضتين يحيطان
بزاوية مفروضة ويكون فصل احدهما على الاخر
مساويا لخط مفروض

ونريد ان نخرجهما من نقطتي آج يحيطان بزاوية مساوية لزاوية س ويكون فصل احدهما
على الاخر مساويا للخط ح ط فنصل آج ونركب عليه قطعة قوس قابله لزاوية مساوية
لزاوية س ونصفها على د ونتمم آدج نصف دايرة ونصل آد در آ ونفرض دح
مساويا لنصف خط ح ط وننزل عمود حل على آر ونوقع وتر دك مساويا لدل ونصل
آك كج فاقول ان فضل آب على بج مساوي خط ح ط برهان ذلك ان ننزل
عمود ده على آب فلان زاويتي ده دزا متساويتان لكونهما على قوس واحدة ومن آد
وزاويتي ده ك ح قايمتان فمثلثا ده ك ك ل ر متشابهان لكنا فرضنا دك مساويا
لدل فالمثلثان مع تشابههما متساويان فك ر مساو لك ب لكن كر فرض مساويا لنصف
ح ط ومعلوم مما تقدم تنصيف عمود ده خط آبج المنحني ز ك ب نصف فصل آب
على بج فضعفه هو ك ل الفصل واذا كان نصف الفصل مساويا لنصف ح ط فكله
مساو لكل ح ط ويحتاج هذه المسيله الى شريطه وهي ان تكون كر ليس باعظم
من آد والا لم يوجد المطلوب وذلك



ما اردنا ان نبين والله اعلم
طريق اخر في ذلك
نصل آج وندير عليه قطعه تقبل
زاوية مساوية لزاوية س ونصفها
على د ونصل دج وننزل عمود دك على آج ونجعل كل مساويا لنصف ح ط ونخرج

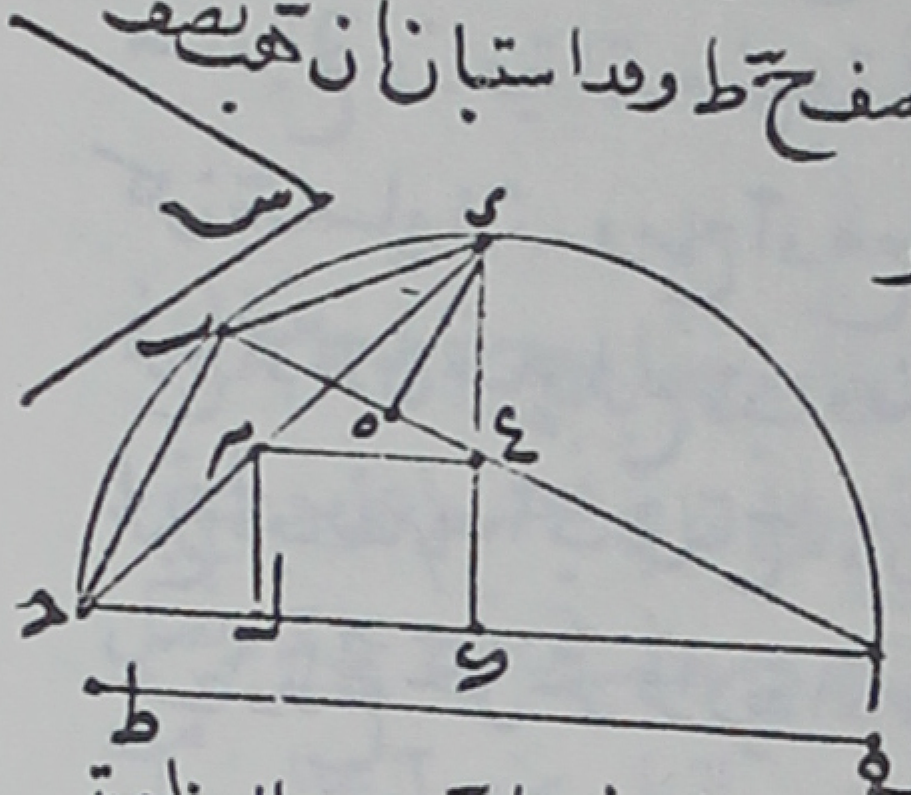
يخرج لم موازيا لدك وتمع موازيا لكـه ويجعل وتردب مساويا لدم ونصل آب بج فيكون

ما اردناه برهان ذلك ان ننزل عمود ده على آب فظاهر ان مثلثي ده دحك متشابهان لتساوي

زاويتي ده دحك اللتين على قوس آد وتساوي زاويتي ده هب دكح اذ كل واحدة منها قائمة

ولان دمع موازي لكح فان مثلث دمع ايضا شبيه بمثلث ده لكن دم مساو لدب فمع مساو لبه

ودمع مساو لكل فه مساو لكل الذي هو مساو لنصف حط وقد استبان ان هب نصف



فصل آب على بج فضعفه هو كل الفضل وهو مساو

لحط وذلك ما اردنا ان نبين

اخراج خطين من نقطتين مفروضتين يحيطان

بزاوية مفروضة يكون ضرب احدهما في الآخر مساويا

لسطح مفروض

ونريد ان نخرجهما من نقطتي آج يحيطان بزاوية

كزاوية س ويكون ضرب احدهما في الآخر مساويا لسطح ط فليكن الخط القوي على سطح ط خط ط

ونصل آج ونركب عليه قطعة تقبل زاوية كزاوية س ونصفها على نقطة د ونصل آد ونديره عليه

نصف دايرة اح د ونوقع فيه وترآح مساويا لخط ك ونصل دح ونجعل وتردب مساويا

لوتر دح ونصل آب بج فاقول ان ضرب آب في بج يساوي سطح ط برهان ذلك ان مربع آد

كما بينا فيما تقدم يساوي مربع دب وضرب آب في بج لمربع آد منقوصا منه مربع دب يساوي ضرب

آب في بج لكن مربع آد منقوصا منه مربع دب هو مساو لمربع آح لانا فرضنا دب مساويا لدح فمربع

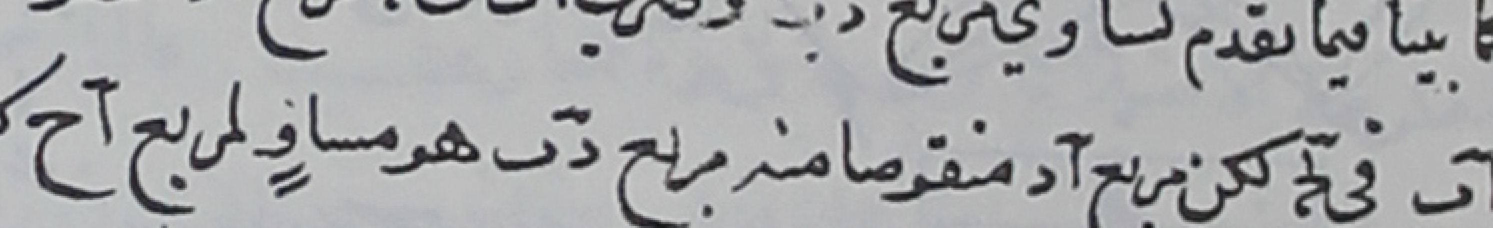
آح اذن يساوي ضرب آب في بج ولكن مربع آح اعني مربع خط ك قد جعل مساويا لسطح ط فضرب آب

في بج يساوي سطح ط وذلك ما

اردنا ان نبين

طريق آخر شبيه بذلك لابي

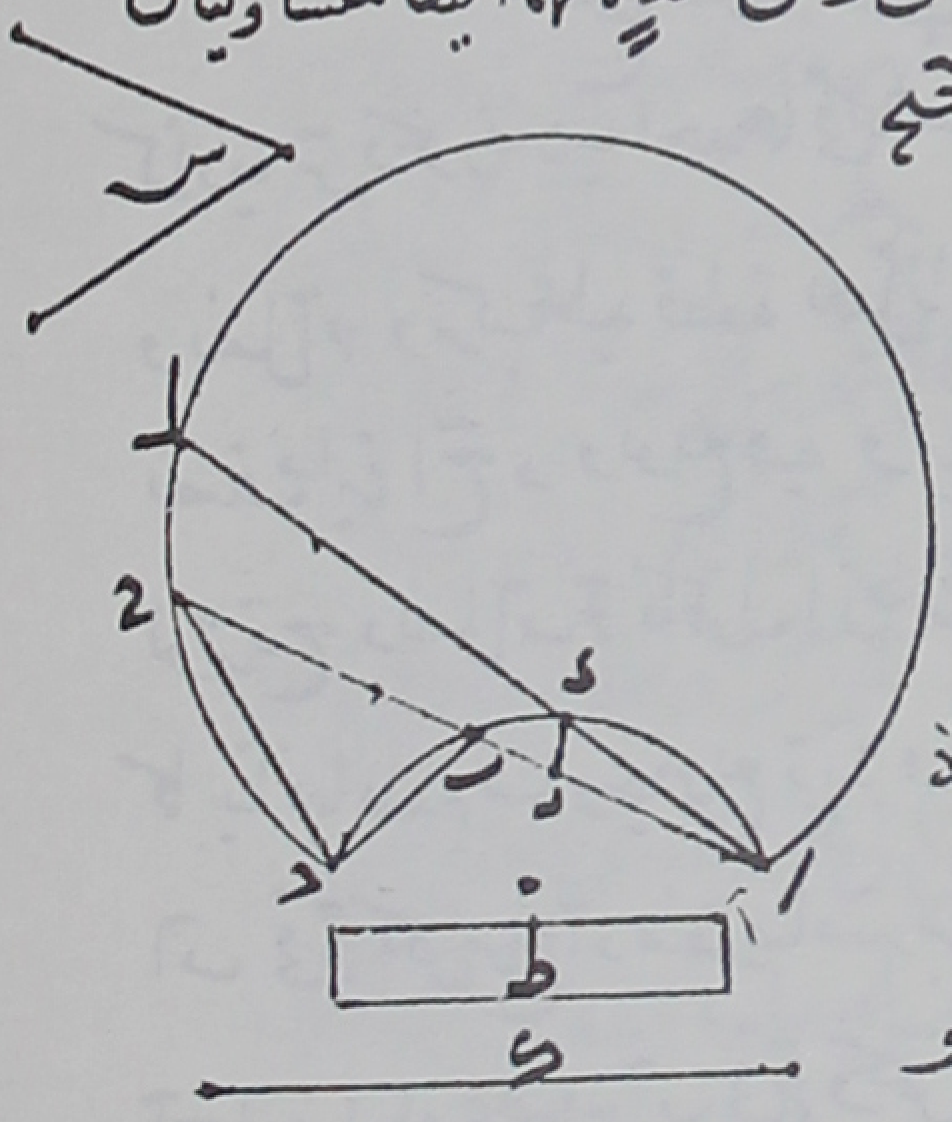
عبد الله الشني



نصل آج ونركب عليه قطعة تقبل زاوية مساوية لزاوية س ونجعل خط ك قويا على سطح ط

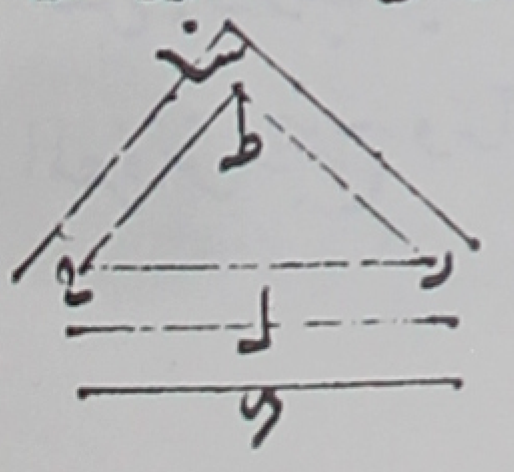
المفروض ونخرج ونتم دايرة الى نصف قوس آد بان نقول ان يكون خط ك اقصر من خط آد

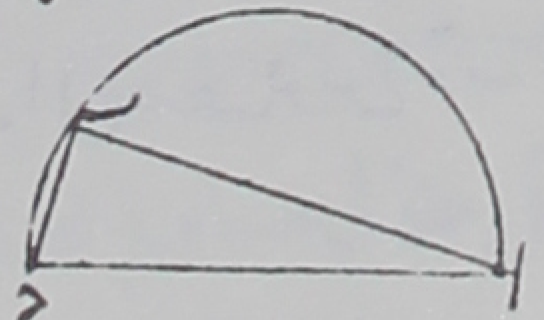
والا فليس المطلوب بممكن فليكن خط ك اقصر من اد ثم نخرج و ترد ب قويا على فضل مربع اد على
مربع ك ونفصل اسه ج فاقول ان ضرب اب في بج مساو لسطح ط المفروض برهان ذلك
انا نجعل نقطة د مركزا وندير ببعد دا قطعة دائرة عليها اجه ونخرج خطي اد اب على استقامتهما
الى محيط تلك القطعة ونصل دح فبان انه مساويا لدا ونخرج در مساويا لدب فبان ار يكون
مساويا لبح وزاوية ادر منفرجة فمربع اد مساو لمربع ار ومربع رد وضرب ار في رب مرة واحدة
لكن در مساو لدب ومربع ار مع ضرب ار في رب مساو لضرب ا في ار اعني ضرب اب في بح
فمربع اد اذن مساو لمربع دب وضرب اب في بج وقد جعلنا فضل مربع اد على مربع ك مساويا
لمربع دب فضرب اب في بح اذن مساو لمربع ك اعني مساو لسطح ط المفروض ثم نصل
خطوط دج حل حم فزاوية ادج مساوية لزاوية احم لانهما في قطعة واحدة فزاويتا لدح حمح
اذن متساويتان ومن اجل ان زاويتي الح احج مركبتان على قوس واحدة فهما ايضا متساويتان
فمثلثا لدح متشابهان ومثلث لدح مساوي الساقين فمثلث حمح



مساوي الساقين ايضا فحب مساو لبح فضرب اب في بح
اذن مساو لسطح ط المفروض وذلك ما اردنا ان نبين
اخراج خطين من نقطتين مفروضتين يحيطان
بزاوية مفروضة ويكون نسبة احدهما الى الاخر كنسبة
معلومة

ونريد ان نخرجهما من نقطتي ا ج يحيطان بزاوية كزاوية س و
يكون نسبة احدهما الى الاخر كنسبة ل الى ط فنجعل خطي طر رح يحيطان بزاوية كزاوية س ونجعل
رط مساويا لخط ك ورح مساويا لخط ل ونصل طح ثم نركب على خط اج قطعة تقبل زاوية كزاوية س
ونجعل زاوية جاب مساوية لزاوية رحط ونصل بج فاقول انا عملنا ما اردنا برهان ذلك
ان زاوية طرح مساوية لزاوية ابج وزاوية طحر مساوية لزاوية جاب فمثلثا ابج رطح متشابهان
ونسبة اب الى بج كنسبة ح د الى رط لكن نسبة ح د الى رط جعل كنسبة ل الى ك فنسبة اب
الى بج كنسبة ل الى ك وذلك ما اردنا ان نبين

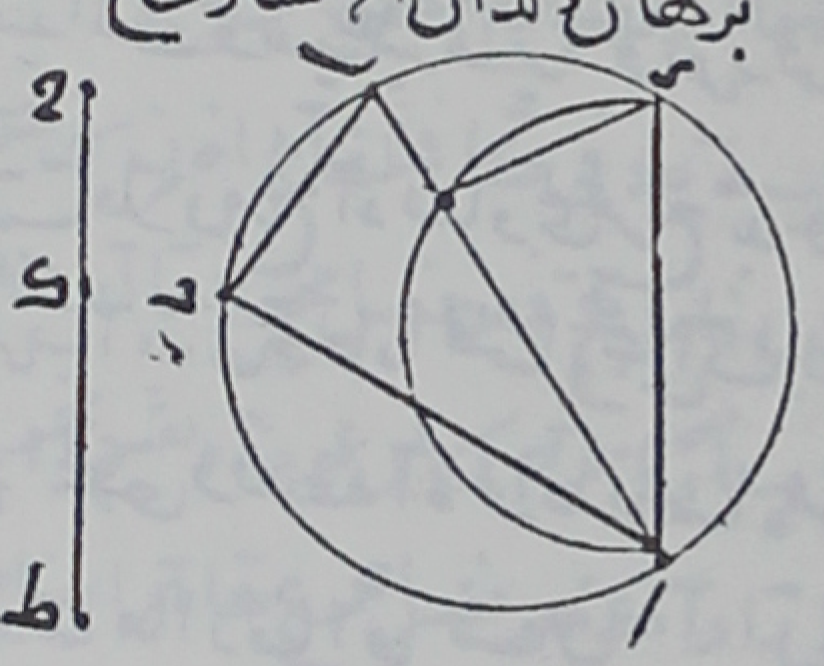




وهذه الاخير وان لم يتصل بخواص الخط المنحني فاني حسبته لسلك بما ذكرته من هذه
ده المسايل الى سايرانواعها التي يودي اليها القسمة فلم يكن الغرض في ذكرها استيفاء
جميعها حتى اعرض منها بجميع ما يحتمله سوبع القسمة لكني حكيت منها ما اتفق لي الجواب
عنه مستنبطا من خواص تلك الدعاوي المقدمة كما سياتي على جميع ما اتفق من ذلك لي ولغيري

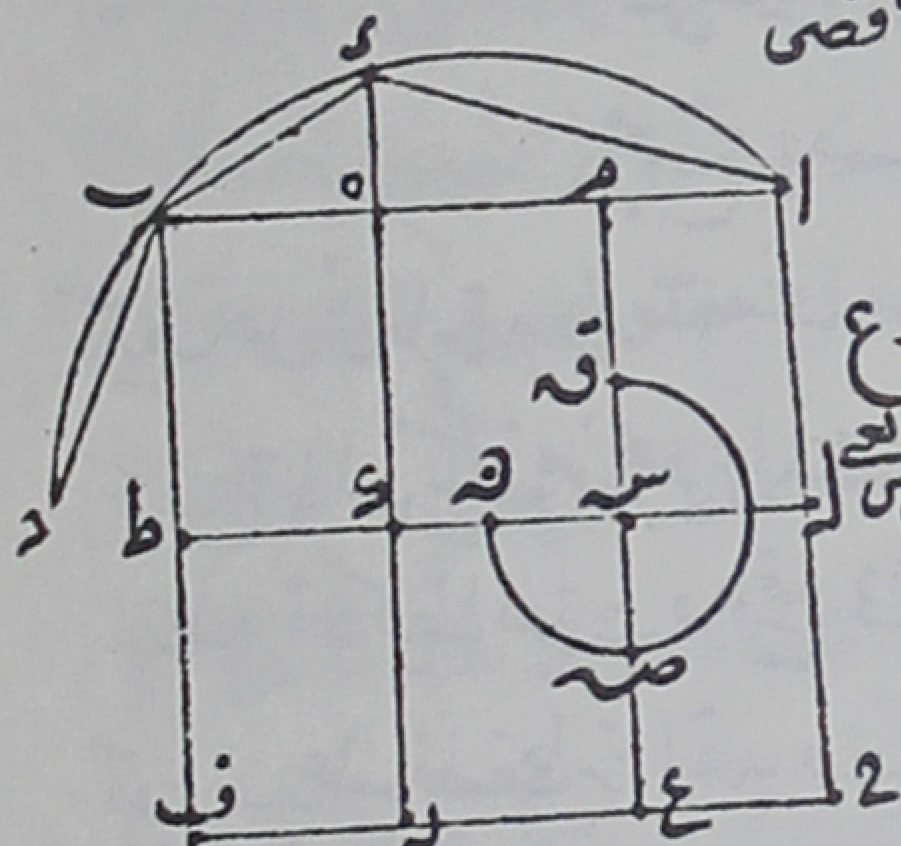
عمل مثلث في دايرة مفروضة يساوي
مجموع اضلاعه خطا مفروضا لي

كيف نعمل في دايرة مفروضة مثلثا يساوي مجموع اضلاعه خطا مفروضا وهو ح ط وينبغي ان
يكون ح ط ليس باكثر من مجموع المثلث المتساوي الاضلاع الواقع في الدايرة فنعلم على خط ح ط
نقطة ک كيف اتفقت ونوقع في الدايرة وتر آح مساويا لح ک وننصف قوس آح على ب ونصل
آد وندير عليه نصف دايرة اهد ونوقع فيه وتر آه مساويا لنصف ک ط ونخرج آه على استقامته
الى ب ونصل ح ب فمثلث آح ب يساوي مجموع اضلاعه خط ح ط برهانه انه لان آح يساوي ح ک
وآه وهو نصف خط آح المنحني يساوي نصف ک ط فكله
يساوي كله فاضلاع مثلث آح ب مجموعه يساوي
خط ح ط وذلك ما طلبنا به ٥



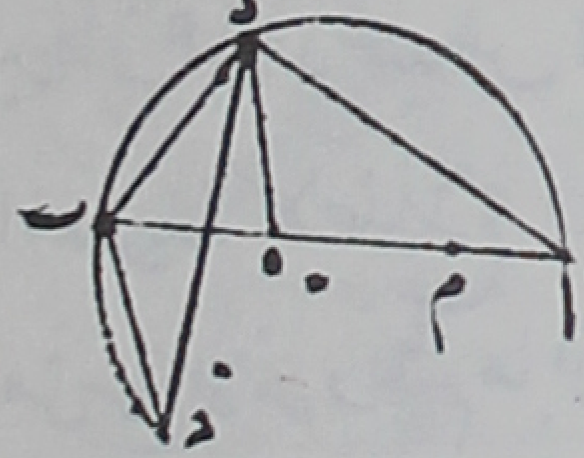
برهان عمل ارشميدس في استخراج اعمدة المثلثات
المعلومة الاضلاع ومساقط احجارها قال ارشميدس يلقى مربع احد الضلعين
من مربع الاخر ونقسم ما بقي على القاعدة فما خرج فهو الذي ان زدناه على القاعدة واخذ نصف ما
ما اجتمع كان القسم الاطول الى مسقط الحجر وان نقصناه منها واخذنا نصف ما بقي كان القسم
الاقصر اليه وبرهانه الذي سيلت عنه ان نعرض المثلث آ ب ج وعموده د ه وندير عليه دايرة
ونفرز د ح منها مساويا لد آ ونصل آح ونعمل على آه مربع آ ر وعلامة مربع ه ط ونجعل ه م
مساويا له ب ونخرج م ع موازيا آه وط ک ل موازيا لا ب ونتم سطح آ ف فلان ه ب
يقوي على د ه ه ب ود آ يقوي على د ه ه آ فيكون مربع د ه مشتركا في القوتين معا فاذا القينا
مربع ه د من مربع د آ كنا كانا القينا مربع ه ب من مربع ه آ ولا خفا بان ذلك الباقي يكون العلم

الذي عليه قص ولمساواة خطوط طك كس سم وخطوط طف كع عم يتساويا
سطوح طك كع مل فاذن سطح طح مساوٍ لعلم قص لكن طف اعني ام لساويه لح
لان خطي ام مه لساويان خطي هب لح فاذن سطح طح هو ضرب اب في لح فاذا قسمناه على القاعدة
خرج لح فان زدناه على القاعدة اجتمع خط اب المنحني ونصفه تكون اد القسم الاطول
وان نقصناه من القاعدة بقي هب ونصفه بد وهو القسم الاقصر
من القاعدة الى المسقط الحجري وذلك ما اردنا ان نبين



وقد لستعمل مكان فضل ما بين مربعي اد دب مضروب مجموع
اد دب في فضل ما بينهما لانهما يتساويان فان فضل ما بين مربعي
اه هب لساوي مضروب اب في فضل ما بين اه هب اعني لح
برهان ثان لي اخف من الاول

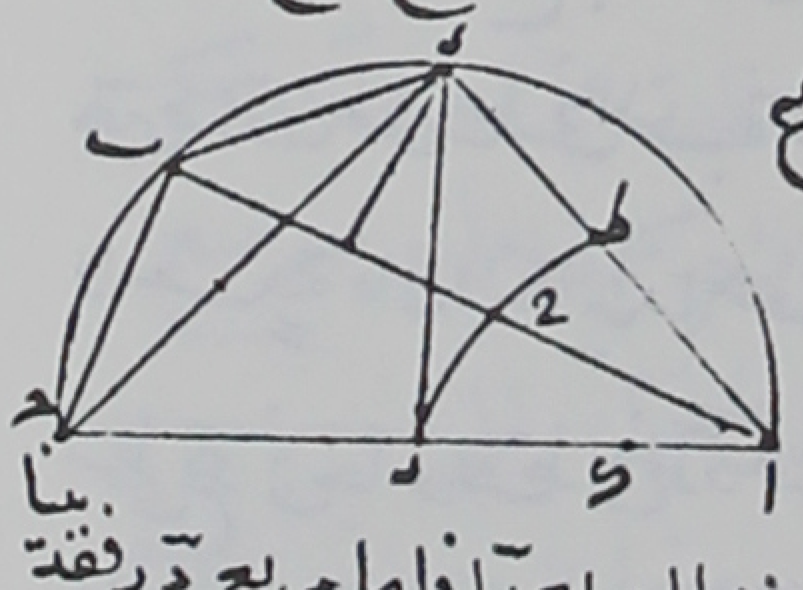
نعيد المثلث ونديره عليه دايرة ونفرز قوس دح مساوية لقوس دا ونصل لح ونجعل هم مساويا
لهب فلان مربع اد لساوي مربع بد وضرب اب في لح يكون اذا نقصنا مربع بد من مربع اد يبقى
ضرب اب في لح فاذا قسمناه على اب القاعدة خرج لح فاذا زدناه على القاعدة اجتمع خط
اب المنحني ونصفه اه واذا نقصناه من اب بقي هب ونصفه هب
وذلك ما اردنا ان نبين



برهان عمل ارشميدس في مساحة المثلثات
من جهة تفاضل اضلاعها لابي عبد الله الشني

قال ارشميدس اذا اردنا مساحة كل مثلث من جهة اضلاعه فانا ناخذ فضل نصف
جماعة اضلاعه على كل ضلع من اضلاعه ونضرب احد تلك الفضول الثلثة في اخر
منها ثم ما بلغ في الثالث ثم ما بلغ في نصف جماعة اضلاع المثلث ونأخذ جذر المبلغ فما كان فهو
مساحة ذلك المثلث قال ابو عبد الله برهان ذلك انا نجعل المثلث عليه اب ح ونخط عليه
دايرة ادبح وليكن نقطة د على منتصف قوس ادح ونخرج منها على خط اب عمود ده
وعلى خط اد عمود در ونصل دا دح دب ونجعل نقطة ا مركزا وندير ببعد ار قوس

قوس رح ط من دايرة تقاطع خط ا ه على نقطة ح وخط ا د على نقطة ط فمربع د ا مساو لمربعي
د ه ه ا وخطا ا ط ا د مساويان يكون مربع د ط وضرب د ط في ط ا مرتين وذلك مساو لمربع د ر
لانا جعلنا ا ط مساويا لا ر يكون مربع د ر مساويا لمربع د ه مع مربع ه ح وضرب ه ح في ح ا مرتين
فمربع د ر اذن مساو لمربع د ه ومربع ه ح وضرب ه ح في ح ا مرتين ولان مثلث د ه ب شبيه بكل واحد
من مثلثي د ر ح د ر ا لان زوايا ا د ر ا ب د حاد متساوية من اجل ان كل واحدة منها يوتر
نصف قوس ا د ح فنسبة د ه الى ه ب كنسبة د ر الى ر ا ونسبة د ر الى ر ا كنسبة مربع د ر الى سطح د ر
في ر ا وكنسبة سطح د ر في ر ا الى مربع ر ا ولذلك ايضا نسبة مربع د ه الى سطح د ه في ه ب كنسبة سطح
د ه في ه ب الى مربع ه ب والمناسبة اذا اسقط عنها متناسبة على نسبتها كانت البواقي متناسبة
فاذا اسقطنا مربع د ه من مربع د ر كان الباقي لما بينا مربع ه ح وضرب ه ح في ح ا مرتين اعني ضرب ه ح
في مجموع ه ا ا ر واذا اسقطنا ضرب د ه في ه ب من ضرب د ر في ر ا وهو تكسير مثلث د ا ح كان الباقي
هو سطح مثلث ا ح وذلك لما نبين من خواص الخط المنحني واذا اسقطنا مربع ه ب اعني مربع ك ر
اذا جعلنا ر ك مساويا له ب من مربع ر ا كان الباقي هو ضرب د ك في ك ا فمثلث ا ح اذن يسمى موسطا
في النسبة من سطح ه ح في مجموع ه ا ا ر وبين سطح ح ك في ك ب فاما ه ح فهو فضل مجموع ه ا ا ر وهو
نصف جماعة اضلاع مثلث ا ح على ضلع ا ح لانا جعلنا ا ح مساويا لـ ر ح ولان عمود د ه يقسم مجموع
خطي ا ب ب ح بنصفين على ه و ا ح منقسم ايضا بنصفين على ر ا و ا ك هو فضل مجموع ه ا ا ر ايضا على ا ح
لانا جعلنا ا ح مساويا لـ ر ح ولان عمود د ه يقسم مجموع خطي ا ب ب ح بنصفين على ه و ا ح منقسم ايضا
بنصفين على ر و ا ك هو فضل مجموع ه ا ا ر ايضا على ا ب لانا جعلنا ك ح مساويا له ب و ه ح ا ك
ك ح فضول نصف جماعة اضلاع مثلث ا ح على كل واحد من اضلاعه وسطح ضربنا سطح ا ك في ك ح
في سطح ه ح في مجموع ه ا ا ر وضربنا ا ك في ك ح وهو احد الفصول في الاخر ثم ما بلغ في ه ح وهو



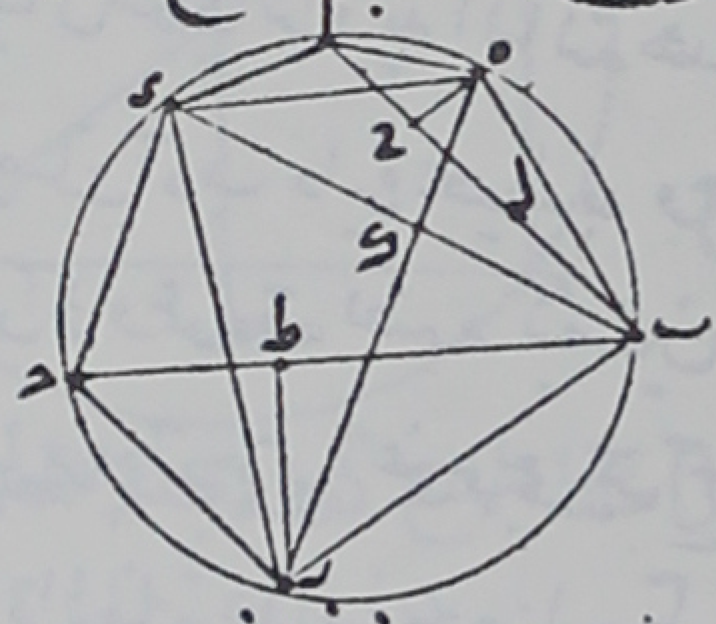
الفضل الثالث ثم ما بلغ في مجموع ه ا ا ر وهو نصف جماعة الاضلاع
فان المبلغ في جميعها هو تكسير مثلث ا ح مضروبا في مثله وذلك ما
اردنا ان نبين وان كان المثلث متساوي الساقين مثل مثلث
ا ب ح كانت نسبة مربع د ر الى سطح د ر في ر ا كنسبة هذا السطح بعينه الى مربع ر ا فاما مربع د ر فقد بينا

انه مساوٍ لمربع د ک وضرب د ط فی ط ا مرتین اعنی مساویا لضرب د ط فی مجموع د ا آ د واما سطح د ر فی د ا فهو کنسبة مثلث ا د ح واما مربع آ ر فهو مساوٍ لسطح آ ر فی ر ح فلذلک نضرب آ ط فی ک ر وهو احد الفصول فی الاخر ثم ما اجتمع فی ک ط وهو الفصل الثالث ثم ما بلغ فی مجموع د ا آ د وهو مجموع نصف الاضلاع فیکون المبلغ مربع سطح د ر فی د ا وذلک ما اردنا بیانه

برهان عمل ینسب الی الهند فی مساحة المنحرف الذی یحیط به دایرة لابی عبد الله الشنی

اذا اردنا مساحة المنحرف الذی یحیط به دایرة تقع فیها فانا ناخذ فصل نصف جملة اضلاعه علی کل ضلع من اضلاعه ثم نضرب احد تلک الفصول فی الفصل الاخر ثم ما اجتمع فی الفصل الثالث ثم ما اجتمع فی الفصل الرابع ثم نوخذ جذر المبلغ فما کان فهو مساحة ذلک المنحرف فلنخط للبرهان ذا اربعة اضلاع آ ب ج د فی دایرة آ ب ج د ونصف کل واحدة من قوسی آ د ب ج علی نقطتی ه ز ونصل خطوط ب ه ه د د ز ز ب ه ا ه ی ویخرج عمود ه ح علی آ ب وعمود ز ط علی ج د ونعلم علی تقاطع خطی ب ه ه ی نقطة ک فنثلثا ه ج ا ه ک د متشابهان وه د اطول من ه ا وک د اطول من ح ا و ز ط نصف مجموع ه ح د ح علی ما قدمنا فخط اطول من ز ک فهو اذن اطول کثیرا من ا ح وکذلک ایضا بین بمثل هذا البرهان بعینه ان ز ح اطول من ز ط فیفصل من ز ح خط ز ل مساویا لـ ز ط ومن ز ط خط ط م مساویا لـ ا ح ولان فصل سطح ه ج ز علی سطح ه ج د هو ضرب ه ح فی جامع ضرب ز ط فی ز ط ومثلث ه ج ا شبیه بمثلث ه ب ز فنسبة ه ج الی ج ا کنسبة ه ب الی ب ز وکذلک ایضا مثلث ط ز د شبیه بمثلث ه ب ز فنسبة ز ک الی ک ح کنسبة ز ب الی ب ز ونسبة ه ب الی ب ز کنسبة مربع ه ب الی سطح ه ب فی ب ز وکنسبة سطح ه ب فی ب ز الی مربع ب ه ومربع ب ز مساوٍ لضرب ب ه فی ه د وکذلک مربع ب ز مساوٍ لضرب ب ز فی ز د وضرب ه ب فی ب ز هو سطح ه ج ز فسطح ه ج ز اذن موسط فی النسبة بین ضرب ب ه فی ه د وبین ضرب ب ز فی ز د والمناسبة علی نسبة واحدة فان النظایر اذا جمعت کانت المجتمعة متناسبة فنسبة مجموع مربعی ه ح ح ط الی مجموع سطحی ه ح فی ح ا وح ط فی ط د کنسبة مجموع هذین السطحین الی مجموع مربعی آ ح ز ط وایضا فان المناسبة اذا اسقط عنها متناسبة کانت البواقی متناسبة فاذا اسقطنا مربعی ه ح ح ط عن

اعنی مربعی ﻫﺢ حل لانا جعلنا حل مساویا لطح من مربع تر کان الباقی هو سطح تل فی لا آد وذلک
لانا اذا اسقطنا مربع ﻫﺢ من مربع تد کان الباقی هو مربع کح واذا اسقطنا من مربع کح مربع حل
کان الباقی هو مربع تل وضرب تل فی کح مرتین وذلک مساو لضرب تل فی مجموع کح تل فاما کح فهو
مساو لمجموع حا آد فلذلک تکون الباقی مساویا لضرب تل فی مجموع لا آد واذا اسقطنا مجموع سطح
ﻫﺢ فی حا وحط فی طر من سطح ﻫﺮد کان الباقی هو سطح اتجد واذا اسقطنا مربعی حا رط اعنی
مربعی تط طم من مربع تر کان الباقی هو سطح تم فی تجد ﺣﺪ علی نحو ما بینا فسطح اتجد اذن یتبقی متوسطا
فی النسبة بین سطحی تل فی لا آد وتد فی تجد ﺣﺪ ولان کح نصف مجموع تا آد وکذلک ایضا تط نصف
مجموع تح ﺣﺪ علی ما قدمنا تکون مجموع حد تط نصف جماعة اضلاع سطح آبجد وتکون فصل مجموع
حد تط علی آب هو تم لانا جعلنا طم مساویا لاح وتکون ایضا فصله علی تح هو تل لانا جعلنا
لح مساویا لحط وایضا فان مجموع تجا آد دح حط نصف جماعة اضلاع سطح آبجد ففضله
علی آد هو مجموع دح تم لما بینا وفضله ﺣﺪ هو مجموع دا آل لما بینا ایضا فخطوط تل لا آد دح تم
مب هی فصول نصف اضلاع سطح آبجد علی کل واحد من اضلاعه وقد بینا ان سطح آبجد

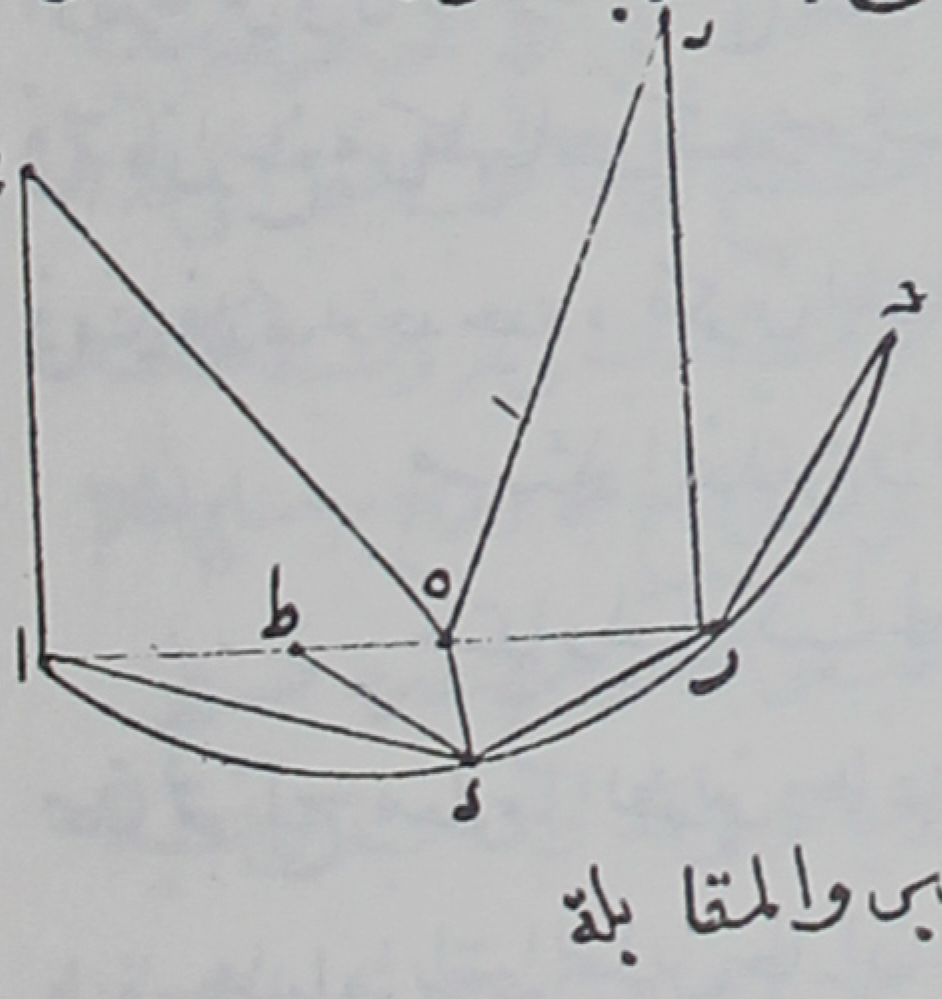


موسط فی النسبة بین سطح تل فی لا آد وبین سطح تم فی تجد
وسواء ضربنا تل فی لا آد تم ما اجتمع فی سطح تم فی تجد
او ضربنا تل فی لا آد تم ما اجتمع فی دح تم تم ما اجتمع
فی تم فان المبلغ من کلیهما هو تکسیر منحرف اتجد مضروبا
فی مثله فلذلک نوخذ جذره فیکون المطلوب وذلک ما اردنا ان نبین

مسئلة النخلتین والنهر والطایرین والسمکة وهی
متداولة فی کتب الجبر والمقابلة لی ۵

نخلتا تر آح معلومتا الطولین وهما علی حافتی نهر عرضه آب وقد ظهرت علی وجه الماء سمکة
فانقض علیها من راسی النخلتین طایران وادرکاها معا فی وقت واحد کیف نعلم بعد موضع
ظهور السمکة من شاطی النهر وکیف نعلم مقدار ما طاره الطایران فی الهواء الجواب
انا نضرب کل واحد من النخلتین فی نفسه ونقسم فصل ما بین ما یجتمع منهما علی عرض النهر فما خرج طولیه

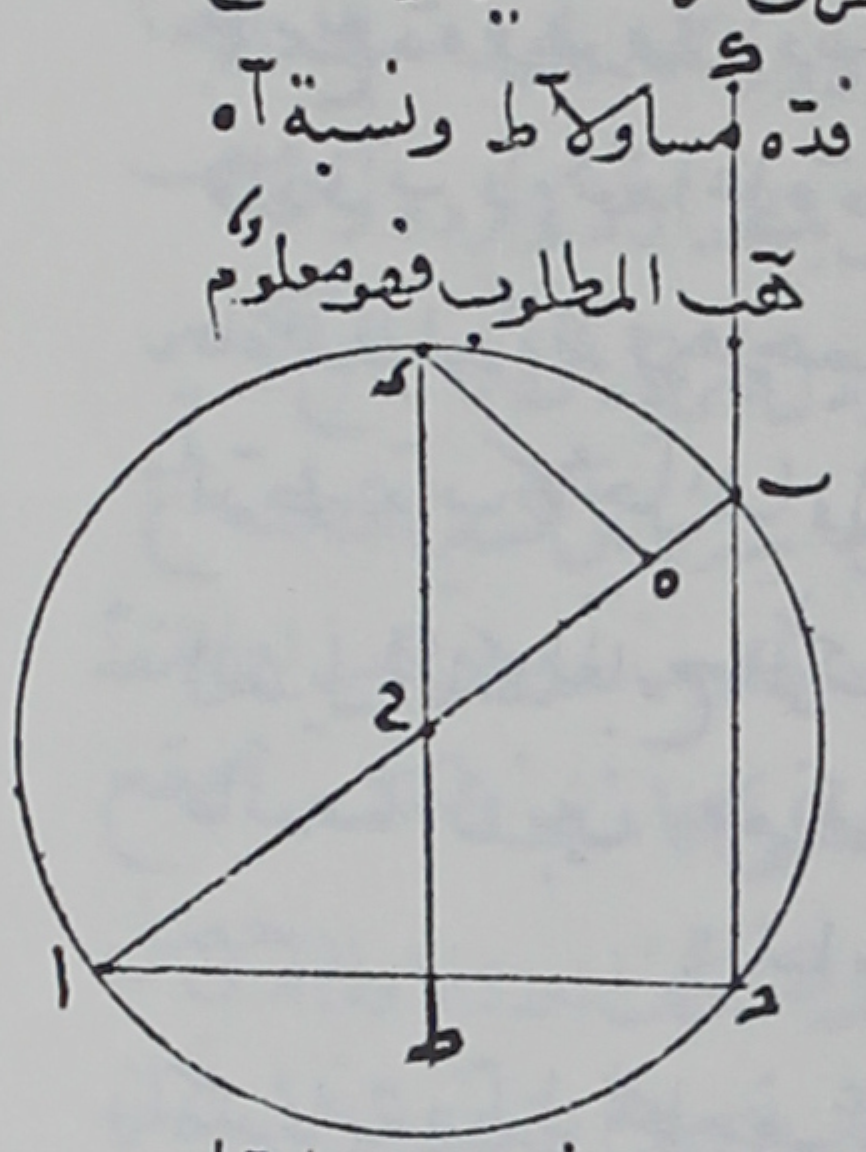
ربیده علی المقسوم علیه وناخذ نصف ما بلغ فیکون بعد موضع ظهور السمکة من اصل النخلة القصیرة
فان القیناذلک من عرض النهر کان الباقی بعد من اصل النخلة الطویلة وان ضربنا طول النخله
فی نفسه وبعد ما بین اصلها وموضع السمکة فی نفسه واخذنا جذر مجموع المبلغین کان ذلک هو مما
طاره کل واحد من الطایرین برهان ذلک انا نفرض طول النخلتین اَ جَ دَ بَ وافقهما حَ اَ و
موضع ظهور السمکة علی الماء نقطة هَ ونصل دَ هَ حَ هَ فیکونان متساویین لانهما بعدان
وطعهما الطایران فی وقت واحد ولذلک یساوی مجموع مربعی دَ بَ بَ هَ مجموع مربعی حَ اَ اَ هَ فیکون فضل
مربع بَ دَ علی مربع حَ اَ مساویا لفضل مربع اَ هَ علی مربع بَ هَ وذلک ظاهر من جهة انه اذا کان مقدارا ن
غیر متساویین فان فضل ما بین المفصولین یکون بعینه فضل ما بین الباقیین منهما ونعمل مثلث اَ بَ دَ
ونجعل فیه اَ دَ مساویا لبَ دَ وبَ دَ مساویا لاَ حَ ونصل دَ هَ فاقول انه عمود علی اَ بَ برهان
ذلک انه لا یمکن غیره فان امکن فلا یکون عمودا علی اَ بَ ولننزل عمود دَ طَ فیکون فضل ما بین مربعی
بَ دَ دَ اَ مساویا لفضل ما بین مربعی بَ طَ طَ اَ لکنه قد بینا ایضا ان فضل ما بین مربعی بَ دَ دَ اَ اعنی مربعی
اَ حَ بَ دَ هو مساو لما بین مربعی اَ هَ بَ هَ وکل واحد من دَ طَ دَ هَ عمود علی اَ بَ ففی مثلث دَ طَ هَ زاویتان
قائمتان سوی الزاویة الثالثة هذا خلف لا یمکن فدَ هَ هو العمود علی اَ بَ دون دَ طَ ثم ندیر
علی مثلث اَ دَ بَ دائرة محیط به ونفرز قوس دَ زَ مساویة لقوس اَ دَ فیکون خط اَ زَ منحنیا فی
قوس اَ زَ وعمود دَ هَ یقسمه بنصفین ومربع اَ دَ یفضل علی مربع بَ دَ بضرب اَ بَ فی زَ حَ فاذا قسمنا فضل
ما بین مربعی اَ دَ دَ بَ اعنی مربعی بَ دَ اَ حَ علی اَ بَ خرج
زَ حَ فاذا زدناه علی اَ بَ حصل خط اَ زَ المنحنی وبصفه



اَ هَ وهو بعد موضع السمکة من نخلة اَ جَ
واذا نقصنا اَ هَ من اَ بَ بقی بَ هَ بعدها من نخلة بَ دَ وذلک
ما اردنا ان بین ٥
مسئلة الخشبة لی وذکرها یحیی فی کتب الجبر والمقابلة
سئلت عن خشبة معلومة الطول منصوبة علی الارض قایمة علی وجهها قد انکسرت وانعطف
راسها حتی بلغ الارض فکان ما بین موضع راسها من الارض الی اصلها معلوما کیف یعلم موضع

[illegible]

موضع انكسارها فقلت تضرب نصف البعد الذي بين موضع راسه وبين اصله من الارض في نفسه
وتقسم على نصف طول الخشبة فاخرج فهو الذي ان نقصته من نصف طول الخشبة بقي ما بقي منها
قائما على وجه الارض وان زدته على نصف طول الخشبة اجتمع مقدار ما انكسر وانعطف الى
الى الارض   فلتكن الخشبة ءحد قائمة على وجه الارض وهو آح وقد انكسرت على نقطة ب
وانعطفت ولم يبن احد قسميها من الاخر فبلغ راسها نقطة آ من الارض ونريد ان نعلم مقدار بح
فلندر على مثلث آبح القائم الزاوية زاوية ح دائرة ونصف قوس آبح على د ونخرج من د عمود ده على آب
وعمود دط على آح فلان عمود دط خارج من منتصف القوس عمودا على وترها فانه ينصف الوتر
ويكون قطعة من القطر ولذلك يكون نقطة ح التي يتقاطع عليها القطران مركز الدائرة ومثلثا دهح
اطح المتناظرين فانهما زاويتا ط متساويتان فهما متشابهان ودح مساو حآ فده مساو لاط ونسبة آه
هب المطلوب فهو معلوم

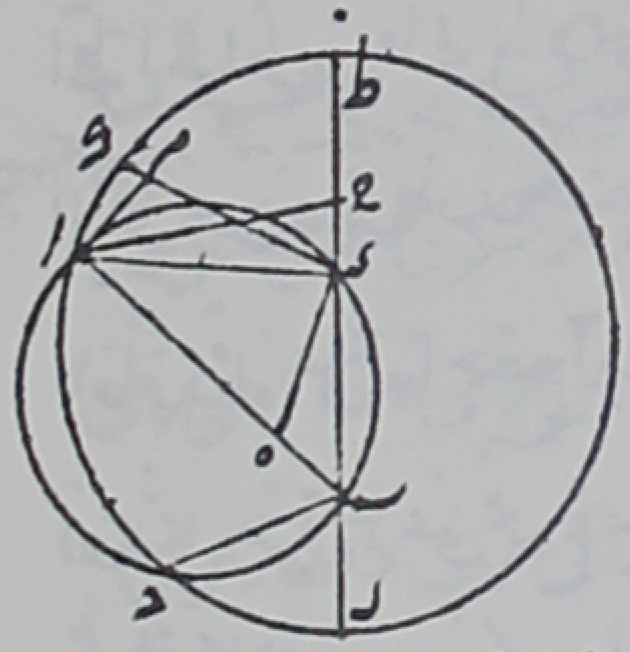


الذي هو نصف طول الخشبة الى ءهد المساوي لاط كنسبة ده الى
فاذا زدناه على آه اجتمع آب وهو ما انكسر من الخشبة واذا
نقصناه من آه اعني مجموع حب به بقي بح وهو ما بقي منها
قائما على الارض وذلك ما اردناه

حل التعديل وتقطيعه لنصف الفلك الخارج
المركز في من كتابي المخصوص بهذا المعنى

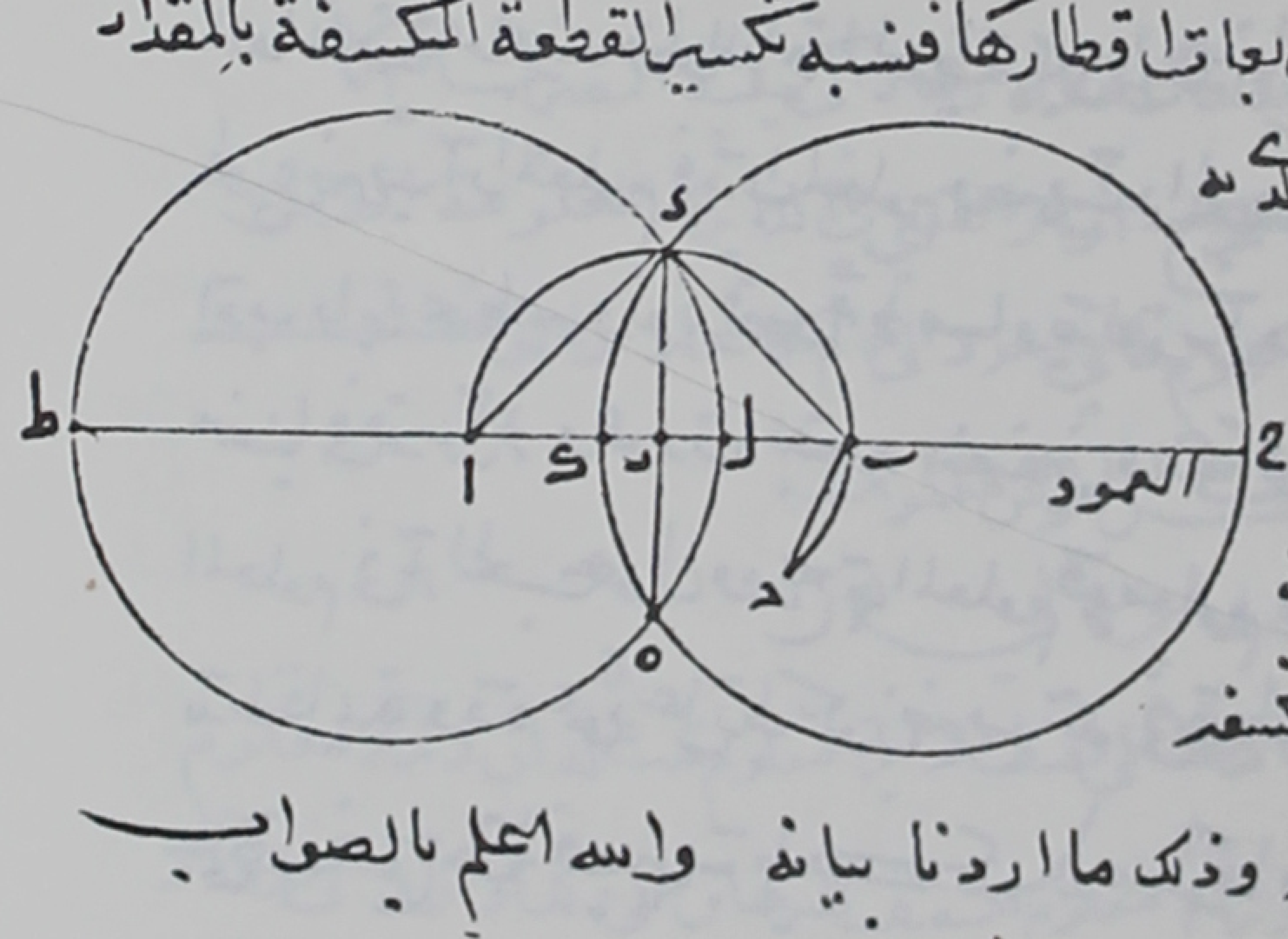
لتكن دائرة طح للفلك الخارج المركز على مركز ه ولتكن من كرة الفلك الممثل بفلك البروج نقطة ب والقطر
المار بكلي المركزين قطر طدر فيكون ط البعد الابعد ور البعد الاقرب ونفرض الشمس على نقطة آ
فيكون طآ الحصة وننزل عمود آح على القطر فيكون حس الحصة وح دحب تمامها ونصل آد آب و
معلوم ان زاوية طدا هي بمقدار الحصة وان زاوية طبا بمقدار الحصة المقومة ولان زاوية طدا
الخارجة عن مثلث ادب مساوية لزاويتي دبا داب فزاوية داب هي فضل ما بين زاويتي طدا طبا
لكن فضل ما بين الوسط والمقوم هو التعديل فزاوية داب هي بمقدار تعديل حصة طبا ونريد ان
نعرفها فننزل عمود ده على آب وندير على مثلث ادب دائرة محيط بر ونصل بح ولنقتصر على هذا
الوضع من اوضاع التعديل فان سايرها مقاس عليه ونقول ——— انه من البين ان مربع

آب نفصل على مربعي آد دب بضعف ضرب بد في دح من اجل ان زاوية ادب منفرجة
فمتى ضربنا ضعف جيب تمام الحصة وهو ح د في ضعف دب وهو جيب التعديل الاعظم
وجمعنا ما بلغ الى مجموع مربعي آد الجيب كله ودب جيب التعديل الاعظم حصل مربع آب
فاذا اخذنا جذره كان آب ولان خط آب منحني في قوس آح ود نصفه عمود ده يكون مربع
آد مساويا لمربع دب وضرب آب في بح فاذا القينا مربع دب جيب التعديل الاعظم من مربع دا
الجيب كله بقي ضرب آب في بح فاذا قسمنا ذلك على آب خرج بح فاذا زدناه على آب واخذنا
نصف الجملة كان آه واذا نقصنا بح من آب بقي ضعف بر لمي بضعفاه و نقصنا مربعه من مربع دب
بقي مربع ده وهو وتر زاوية التعديل في الدائرة التي يكون قطرها آد لكنا اذا اخرجنا دك



موازي آب وآم عمودا على دك كان سطح اقدم متوازي الاضلاع
قائم الزوايا وآم الذي هو جيب زاوية ادك مساوي ده وزاويتا
ادك دآب لاجل التبادل متساويتان فده اذن جيب
التعديل في الفلك الخارج المركز لحصة طا وآه جيب تمامه وذلك
ما اردنا ان نبين معرفة القطعة المنكسفة من احد النيرين لحبش من كتابه
في المسائل المفيدة والجوابات السديدة في عمل زيج الخوارزمي
لتكن دائرة د طرل للكاسف على مركز آ ودائرة د كرح للمنكسف على مركز ب وقد حصل من
الزيج قطرهاتين الدائرتين بمقدار الدوائر العظام اعني الذي به الدائرة العظيمة على الكرة
ثلثمائة وستون جزء ونريد ان نعلم تكسير قطعة د كرل التي سترت من دائرة د طرل من دائرة
د كرح بالمقدار الذي به تكسير جميع دائرة د كرح اثنى عشر فنصل آد بد بر آد آر ونخرج
الخط المار على المركزين وهو طآح وهذه كلها قسى الا انا نستعملها استعمال الخطوط لصغر
مقدارها بالاضافة الى دور الدائرة التي منها طآح فنديرعلى مثلث ادب دائرة تحيط به وناخذ منها
قوس دح مساوية لقوس آد ونصل بح فلان خط آبح منحني في قوس ادح وقد نزل عليه من منتصف
القوس وهو د عمود ده فانا اذا القينا مربع بد من مربع آد بقي ضرب آب في بح فاذا قسمنا على
آب وهو عرض القمر في كسوف القمر والمجموع في كسوف الشمس خرج بح فاذا زدناه على

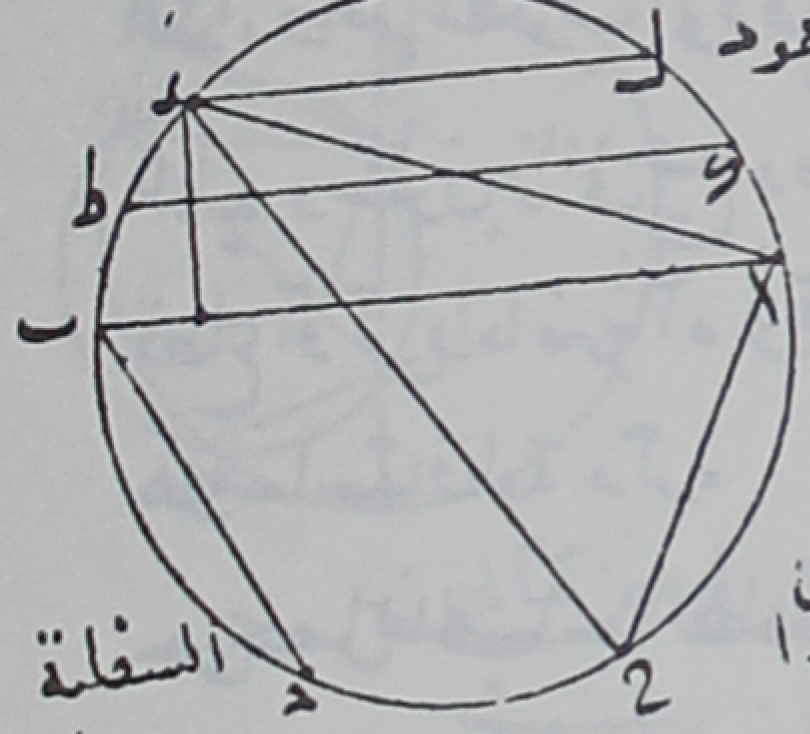
على آب واخذنا نصف الجملة كان آه فاه هب معلومان وبين ان ضرب آه في ه ط يساوي مربع هد
لكن هد اذا ضرح لنا خرج بالمقدار الذي به حصل كل واحد من قطري الكاسف والمنكسف
ولست لنا حبوب مقطوعة على هذا المقدار حتى يمكنا منها معرفة وتر د ل فلذلك يحتاج ان يحول هذا
السهم اعنى هد الى المقدار الذي يرتب الجيب كله بان نضربه في آل ونقسم المبلغ على الجيب كله فيخرج هد
بالمقدار المطلوب فنقوسه حينئذ في جداول الجيوب فيخرج قوس د ل بالمقدار الذي به دور الكاسف
ثلثمايه وستون جزءا ومتى عرفنا نسبة قوس د ل الى دور دائرة الكاسف بذلك المقدار احتجنا
ان نعرف مقداره بالمقدار الاول الذي به عرفنا اولا مقدار قطر الكاسف ولان نسبة القطر الى الدور
نسبة واحد الى ثلثة وسبع نضرب ط ل في ثلثة وسبع فيجتمع دور الكاسف ونسبة د ل بهذا
المقدار وهو المطلوب الى دور الكاسف فهذا المقدار كنسبة د ل بالمقدار الذي به دور الكاسف
ثلثمايه وستون جزءا الى جميع دورها فاذا حصل المطلوب وهو د ل ضربناه في آل فاجتمع تكسير
قطاع آ د ک واذا ضربنا آه في هد اجتمع تكسير مثلث آ د ه وفضل ما بينه وبين تكسير القطاع
هو مساحة قطعة د ک ه   بعينه مثل في قوس د ک وقطاع د ک ب ومثله تدبرا لعمل المتقدم
حتى يحصل لنا مساحة قطعة د ک ه فيجمعهما اعني مساحة قطعتي الكاسف والمنكسف فيجتمع
مساحة القطعة المنكسفة الان بالمقدار الذي به ح ک قطر المنكسف لعدد الاول لذي حصل
لنا من الزيج ويحتاج ان يحوله الى المقدار الذي به مساحة المنكسف كله اثنى عشر ولان نسبة الجزء
من الدائرة الى الجزء المشابه له من الاخرى كنسبة كل الدائرة الاولى الى كل الدائرة الاخرى ونسب
الدواير بعضها الى بعض على نسب مربعات اقطارها فنسبة تكسير القطعة المنكسفة بالمقدار



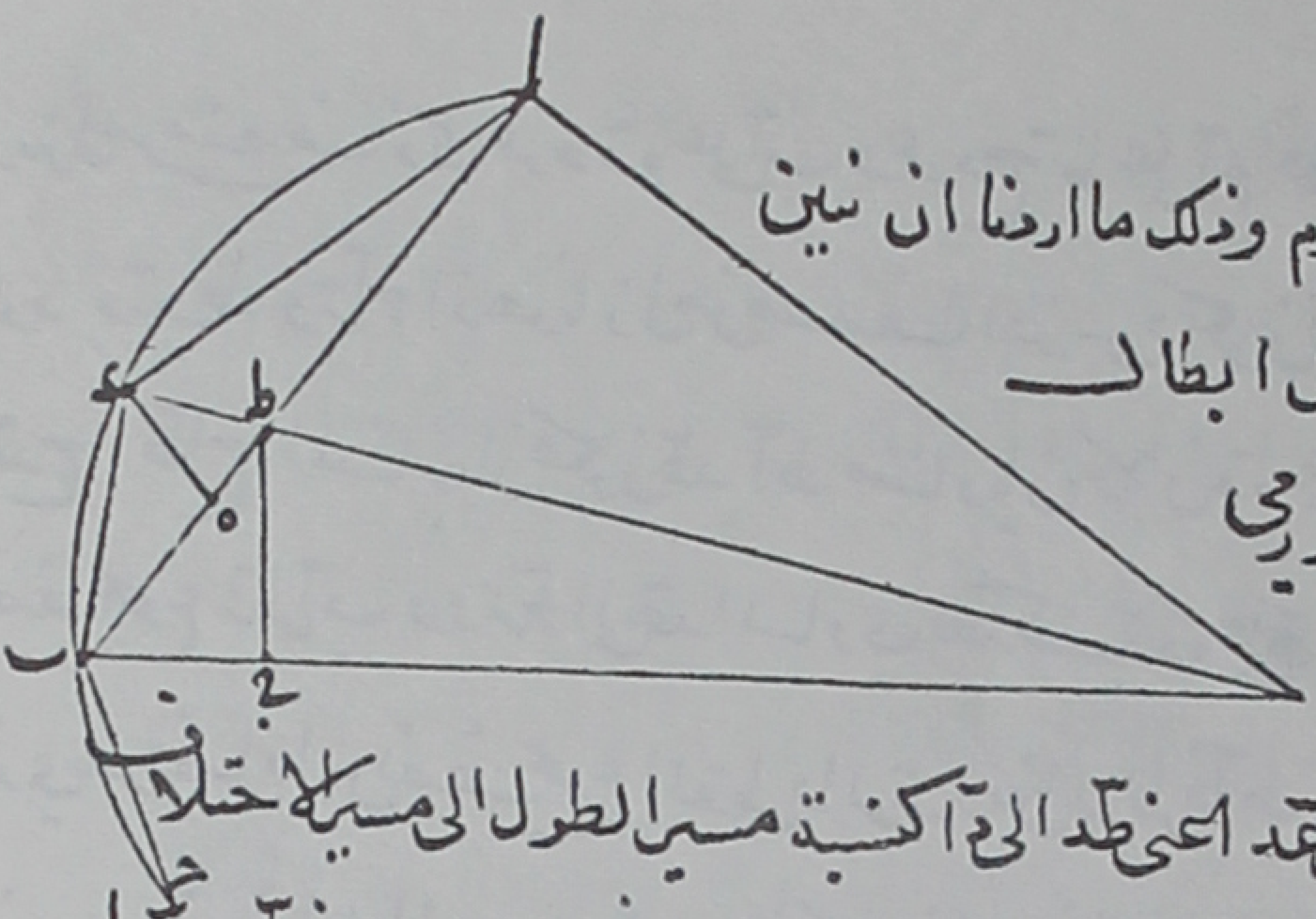
الذي حصل لنا الى تكسيرها بالمقدار الذي
به مساحة جرم المنكسف اثنا عشر
كنسبة مربع قطر المنكسف على ما
حصل لنا من الزيج الى ماية واربعة
واربعون فمساحة القطعة المنكسفة
معلومة على ما طلبناها به وذلك ما اردنا بيانه   والله اعلم بالصواب

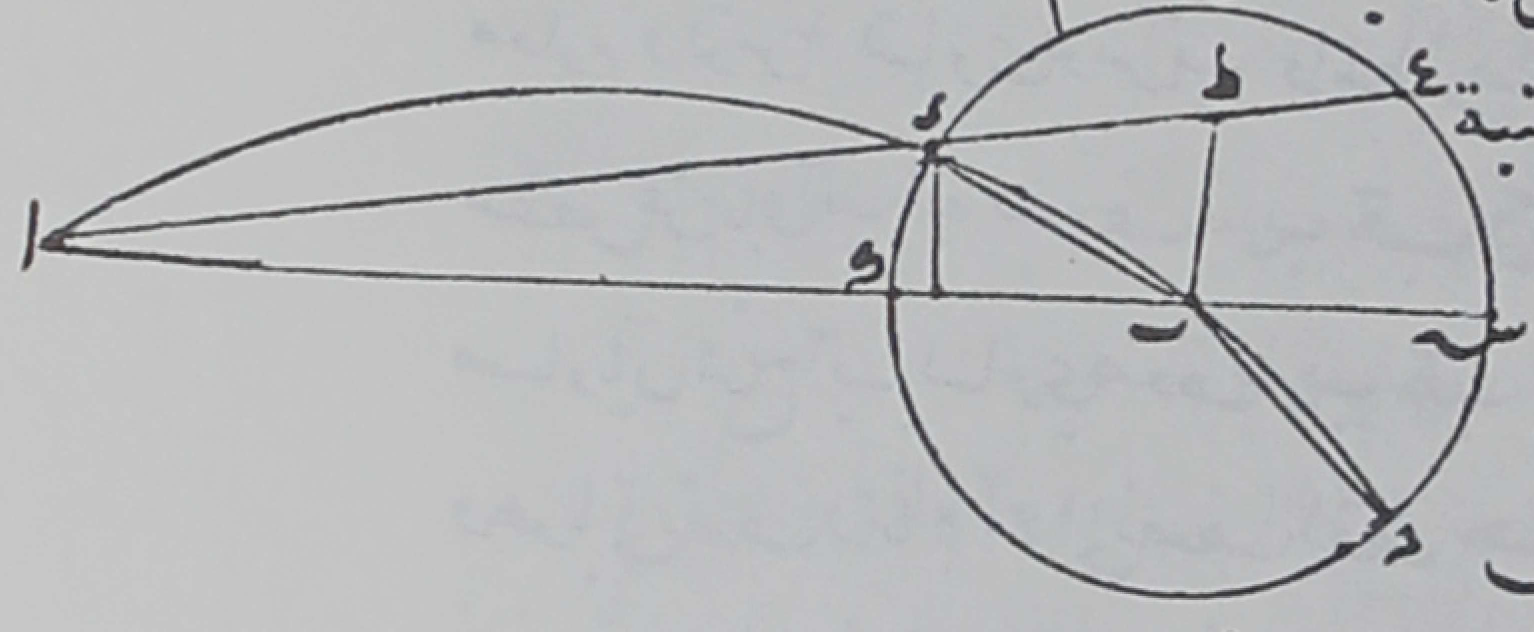
برهان عمل حبش الحاسب في رصد الشمس

لتكن دايرة آبج دايرة سعة المشرق وفيها اوتار كد كط آب متوازية معلومة وهي اضعاف
جيوب سعة مشارق الشمس على طرفي مدتين متساويتين ومطلوبه قطر الداىرة فنصل آد فيكون
مساويا لوتر كط لان كد مع كط دط المتساوين فرضا نسب تساوي المدتين مساوٍ لكد مع
لك كا المتساوين ونجعل قوس دح مساوية لقوس دا ونصل آح فيكون مساويا لكد ولان مربع آد
ونسميه المحفوظ الثاني مساو لمربع دب الوتر وضرب آب المحفوظ الثاني في آح المحفوظ الاول
فدب الوتر معلوم ونخرج عمود دة فيكون معلوما لان دب الوتر معلوم وهب نصف آب كد ونخرج
قطر دح ونصل آح فلان زاويتي دح به دح امساويتان لكونهما على قوس آد وزاويتا دآح دهب قائمتان
فان مثلثي دهب داح متشابهان ونسبة دب الوتر الى دة العمود
كنسبة دح القطر الى آد المحفوظ الثاني فقطر دح معلوم
وهو جيب سعة المشرق الكلي بحسب موضعه وذلك ما اردنا بيانه
مسئلة احوج اليها معرفة الابعاد
في مقالتي في دلالة الآثار العلوية على الاحداث



مثلثا آب بد قائمتي زاويتي آ د وهما معا على قاعدة آب وتداخرج عمود دط على آب من نقطة
تقاطع آد با كيف نعلم دط من قبل اضلاع المثلث المعلومة فنصل آد فيكون معلوما من جهة
ان ذا اربعة اضلاع آدبر مما يحيط به دايرة لان آب يوتر كل واحدة من زاويتي المثلثين
القائمتين فهو بعينه قطر للدايرة المحيطة بكل واحد منهما وضرب آب المعلوم في دا المعلوم مساوٍ
لمجموع ضرب آر المعلوم في دب المعلوم وضرب آد المجهول في آب المعلوم ثم نديرعلى مثلث
آدب دايرة محيطة بر ونفرز قوس دح مساوية لقوس آد وننزل عمود دة على آب فيكون خط آح
منحنيا في قوس آح وعمود دة يقسمه بنصفين ولذلك يكون مربع آد المعلوم مساويا لضرب آب
المعلوم في آح المجهول ومربع بد المعلوم فبح معلوم وآه هب لذلك معلومان ولان زاوية
بدط قايمة ودة عمود على بط يكون ضرب به في هط مساويا لمربع دة فمتى قسمنا مربع دة
على هب خرج هط فيصير بط كله معلوما ونسبة طب المعلوم الى بح المطلوب كنسبة

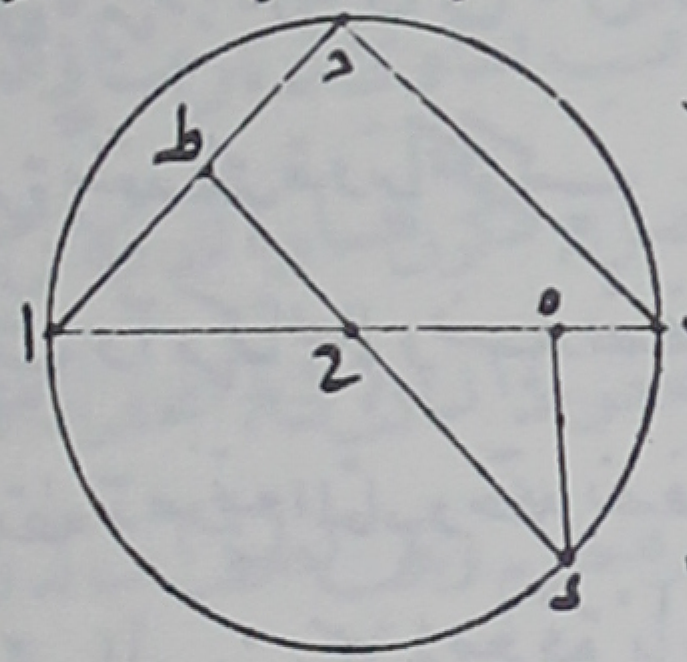


كنسبة رب المعلوم الى دا المعلوم فرح معلوم وذلك ما اردنا ان نبين
معرفة قوس رجوع الكواكب من كتابي في ابطال
البهتان بايراد البرهان على اعمال الخوارزمي
لتكن دائرة ستعد فلك تدوير الكوكب
على مركز ب و ا مركز العالم ونسبة نصف قطر الحامل الى ا كنسبة مسير الطول الى مسير الاختلاف
تكون نقطة د موضع المقام وقد نصف قوس الرجوع ولما استخرج بطلميوس كل واحد من اد دط
باقسام اب السبين سلك في معرفة زاوية دب ط طريقة في جميع اعمال كتاب المجسطي وانا قد
ادرت على ضلع اد ب دائرة وافرزت منها دح مساوية لاد ووصلت بح وانزلت عمود ده فلان
اح خط منحني في قوس اد ح تكون مربع اد المعلوم مساويا لمربع بد نصف قطر فلك التدوير وضرب
اب الذي هو ستون في ح المجهول فاذا القينا مربع بد من مربع اد تقي ضرب اب في ح فاذا قسمنا ذلك
على اب خرج ح فاذا زدناه على اب ونصفنا الجملة حصل اه فيقبل ذلك معلوم وده تكون معلوما

باجزاء اب ونسبة ده بهذا المقدار الى دب بهذا المقدار كنسبة
ده بالمقدار الذي به دب الجيب كله الى دب الجيب كله
فاذا حولناه وقوسناه خرج قوس د ط المطلوبة وذلك
ما اردنا ان نبين ٥ وقد تمكنا الى وجود المطلوب
سلوك طريق اسهل من الذي يمضي في الوقت الان لعرض في صرفها الى امر واحد هو الامانة
عن محل الخاصيتين المذكورتين من هذه الصناعة والارشاد الى كيفية التصرف فيهما
استعمال خاصية الخط المنحني في استخراج اوتار القسي في الدائرة المعلومة القطر
واذ قد تقدم ذكرها وقع بر الوعد في اول الكلام فاني اعود الى تمام الاعداد واقول

معرفة وتر تمام كل قوس معلومة
الوتر الى نصف الدايرة لي

كل قوس معلومة الوتر فان وتر تمامها الى نصف الدائرة معلوم من اجل ان وتر ح معلوم
وقطر الدائرة وهو اب معلوم ثم فاقول ان وتر اح معلوم فلنصف للبرهان على ذلك قوس اح على نقطة د

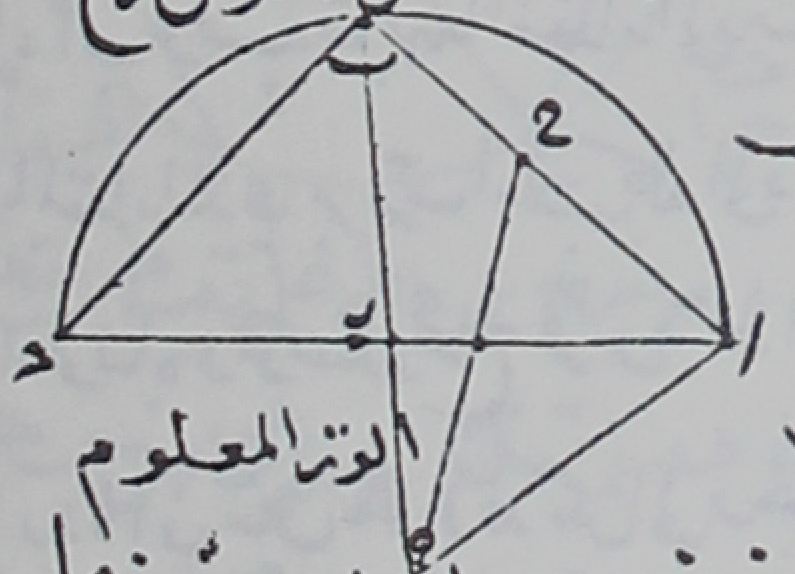
وينزل من منتصف ذلك عمود ده على آب وعمود حط على آح فليتل ما تبين في مسئلة الخشبة بنصف
عمود دح خط وتر آح اذ هو نازل من منتصف القوس ويكون نقطة ح مركز الدايرة ويساوي مثلثا
هدح طاح المتشابهان فيكون هد آط متساويان ولان ده عمود على قطر آب يكون نسبة آه الذي هو
نصف مجموع قطر آب ووتر آح الى هد المساوي لطا كنسبة ده الى هب



الذي هو فضل ما بين نصف مجموع القطر والوتر وبين القطر فآط
الذي هو نصف المطلوب معلوم وذلك ما اردناه
وحساب هذا مع طوله اسهل من اسقاط مربع تح من مربع آب
واخذ جذر الباقي وذلك انا نجمع القطر والوتر ونضرب نصف الجملة في فضل القطر على هذا
النصف ونأخذ جذر المبلغ ونضعفه فيكون وتر تمام قوس الوتر المعلوم الى نصف الدايرة

معرفة وتر ضعف كل قوس معلومة الوتر لي

كل قوس معلومة الوتر في دايرة معلومة القطر فان وتر ضعفها معلوم مثاله ان وتر آب
معلوم وقوس بح تساوي قوس آب والمطلوب آح فلنخرج نصف قطر به ونصل آه فلان مربع آه
ينقص عن مربعي آب به بضعف ضرب هب في بر لكن آه هب



متساويان فمربع آب يساوي ضعف ضرب هب في بر فبر معلوم
وهو باقي نصف وتر تمام آح الى نصف القطر حسابه نضرب
الوتر المعلوم
في نفسه ونقسم نصف ما بلغ على نصف القطر فاخرج نلقيه من نصف
القطر بد نصف ما
بقي ونضربه في نفسه ونسقط ما اجتمع من مضروب القطر في نفسه ونأخذ جذر ما بقي فيكون
وتر ضعف قوس الوتر المفروض

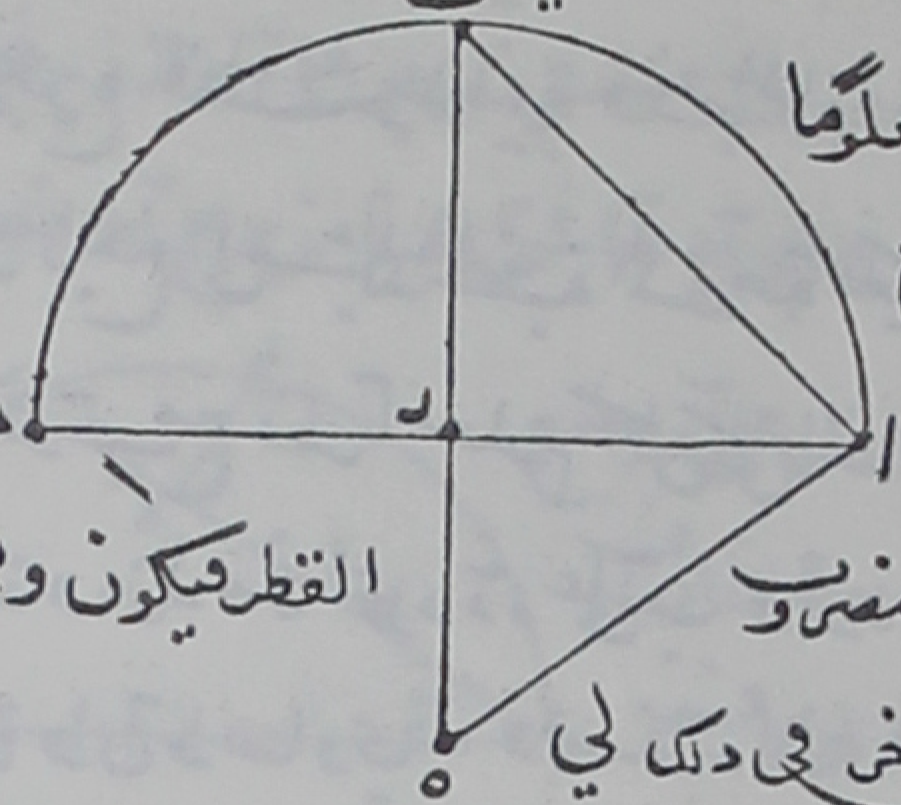
طريق آخر في ذلك لي

وهو ان نخرج عمود هج على آب فزاويتا آ ر ت ه ح متساويتان وزاويتا ح ر قايمتان فمثلثا آ ر
بهج متشابهان فنسبة آب الى آر كنسبة بر الى هج فآر معلوم وضعفه آح فهو معلوم
حسابه نضرب الوتر المعلوم في نفسه ونلقيه مما اجتمع من مضروب القطر في نفسه ونأخذ جذر
ربع ما بقي فنضربه في الوتر المعلوم ونقسم المبلغ على نصف القطر فاخرج من القسمة نضعفه
فيحصل وتر ضعف قوس الوتر المفروض معرفة وتر منتصف كل قوس معلومة الوتر لي

شكل قوس معلومة الوتر في دائرة معلومة القطر فان وتر نصفها معلوم مثاله ان وتر اج

معلوم وقوس آب مساوية لقوس بج فاقول ان وتر آب معلوم وذلك انا نخرج نصف قطر زه

ونصل آه فلان مربع آب المطلوب ينقص عن مربعي آه هب المعلومين بضعف ضرب تر المعلوم



في هر نصف وتر تمام آج الى نصف الدائرة يكون آب معلوما

حسابه نضرب الوتر المعلوم في نفسه ونلقي ما اجتمع

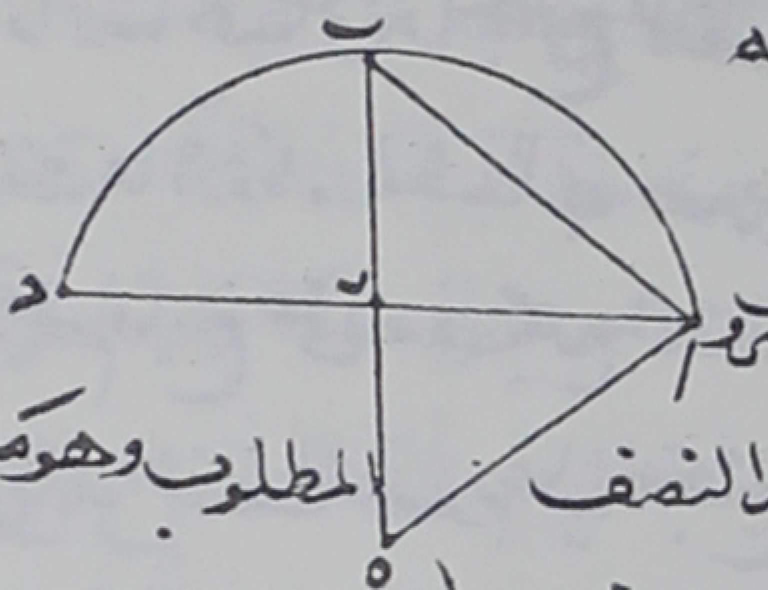
من مضروب القطر في نفسه وناخذ جذر ربع ما

بقي فنضربه في نصف القطر ونزيد على ما اجتمع مضروب القطر فيكون وتر نصف

القوس المعلومة الوتر

طريق اخر في ذلك لي

وهو ان زه نصف وتر تمام آج الى نصف الدائرة يكون تر باقية من نصف القطر وآب نقوي



على آر زب فهو معلوم حسابه نضرب الوتر المعلوم في نفسه

ونلقي ما اجتمع من مضروب القطر في نفسه وننقص جذر

ما بقي من القطر فما بقي نضربه في نفسه ونزيد المبلغ على مضروب

نصف الوتر المعلوم في نفسه فما بلغ ناخذ جذره فيكون وتر النصف المطلوب وهو ما

اردنا

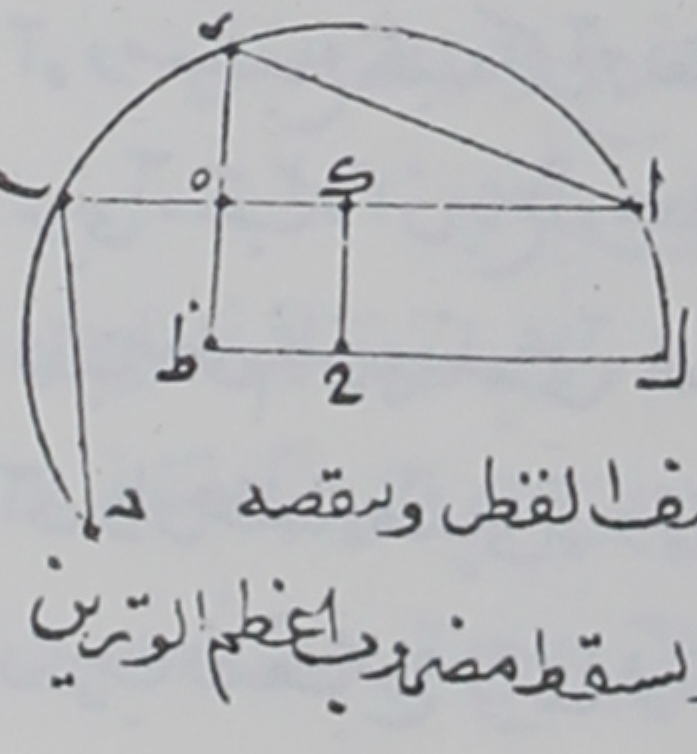
معرفة وتر نصف مجموع قوسين معلومي الوترين لي

شكل قوسين معلومتي الوترين فان وتر نصف مجموعهما معلوم مثاله ان وتري آب بج

معلومان وقوس آد مساوية لقوس دج اقول ان وتر آد معلوم برهانه

انا نخرج عمود ده على آب ونخرج من المركز وهو ح عمودي حط حك فظاهر ان خ ده نصف

وتر تمام آب الى نصف الدائرة وهط مساويه وآه هو نصف مجموع آب بج فتكون هو مساو



لنصف بج اذ هو مساو لنصف الوتر الخارج من نقطة د على موازاة

وتر آب ونخرج طح على استقامته فمن نضرب آط في باقيه

من القطر مساو لمربع طد فاذا اسقط منه طه بقي هد معلوما

وآه معلوم فآد معلوم حسابه نزيد نصف صغرى الوترين على نصف القطر وننقصه

ايضا منه ثم ننقص الزائد في الناقص ونحفظ جذر المجتمع ونسقط مضروب اعظم الوترين

فی نفسه من مضروب القطر فی نفسه ونأخذ جذر ربع ما بقی ونلقیه من المحفوظ ثم نضرب الباقی

فی نفسه ونزیده علی مضروب نصف مجموع الوترین فی نفسه ونأخذ جذر الجملة فیکون وتر نصف

مجموع القوسین المعلومتی الوترین معرفة وتر تمام قوس معلومة الوتر الی نصف دایرة

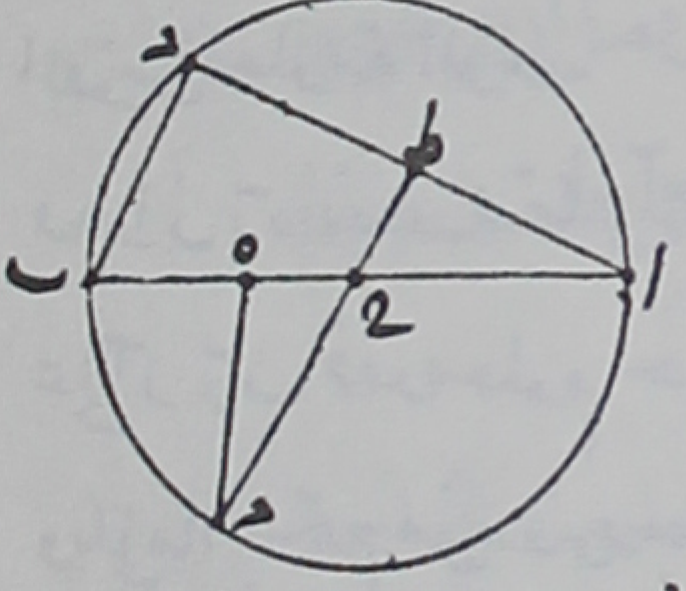
اذا کان مجموع قطر الدایرة ووتر التمام معلومًا وکل واحد منهما بانفراده مجهولا الی

هذا راجع الی مسئلة الخشبة المقدمة فلیکن آح معلوم الوتر ومجموع وتر تمامه الی النصف

الدایرة وهو حب مع قطرها معلوم لکن کل واحد من آب بح بانفراده مجهول فلنصف لذلک قوس آح

علی نقطة د وننزل منها عمود ده علی آب وعمود دح ط علی آح وقد بین فیما تقدم ان نقطة ح

مرکز الدایرة وان آط یساوی ده ولیسه آه الذی هو نصف مجموع



قطر آب ووتر بح الی ده المساوی لنصف آح کنسبة ده الی هب

فاذا زدنا هب علی آه اجتمع القطر واذا نقصنا منه حصل الوتر

وذلک ما اردناه حسابه نضرب نصف الوتر المعلوم فی نفسه

ونقسم ما بلغ علی نصف مجموع القطر ووتر تمام قوس الوتر المعلوم فما خرج فهو الذی ان زدناه

علی ذلک النصف المقسوم علیه اجتمع القطر وان نقصناه منه حصل وتر تمام قوس الوتر المعلوم

الی النصف الدایرة معرفة وتر القوس ووتر تمامها الی نصف الدایرة المعلومة

القطر اذا کان الوتران بمجموعهما معلومین وبالتفصیل مجهولین

فلیکن فی المثال قطر آح معلومًا ومجموع وتری آب بح معلوم ونرید ان نعلم کل واحد من

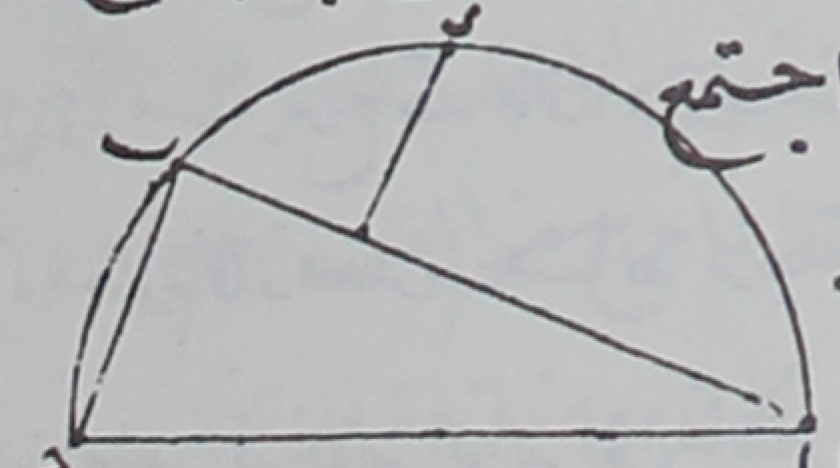
هذین الوترین بانفراده فلنصف قوس آح علی نقطة د وننزل عمود ده علی آب فلان خط آح

منقسم بنصفین علی ه وبقسمین مختلفین علی ب یکون مجموع مربعی آب بح مساویا لضعف مربع

آه وضعف مربع هب لکن آح یقوی علی آب بح فاذا القینا من مربع آح نصفه کان ما بقی مساویا لمجموع

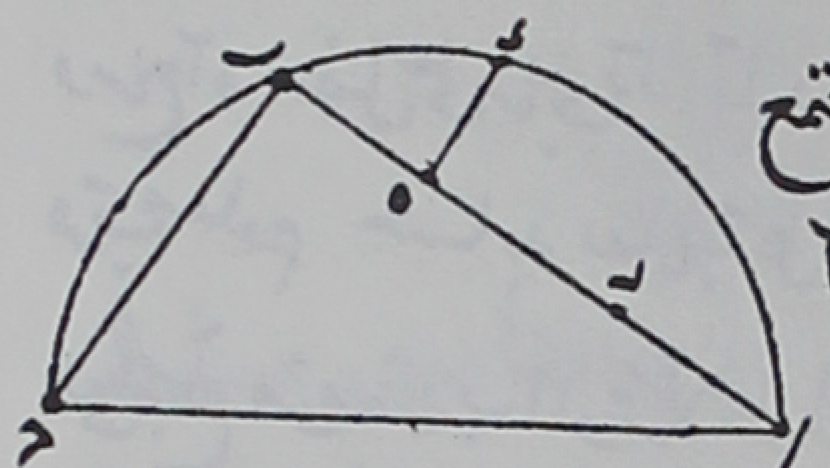
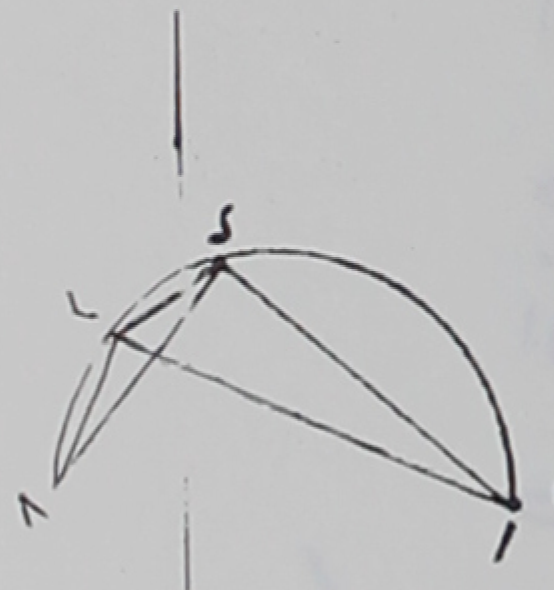
مربعی آه هب الا ان مربع آه معلوم لان آه نصف آح المعلوم فاذا القینا من ذلک الباقی بقی مربع هب

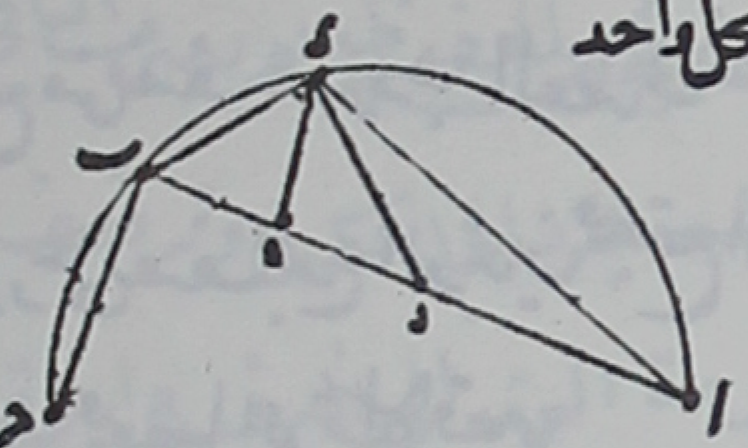
وهب معلوم فان زدناه علی آه الذی هو نصف مجموع آب بح اجتمع



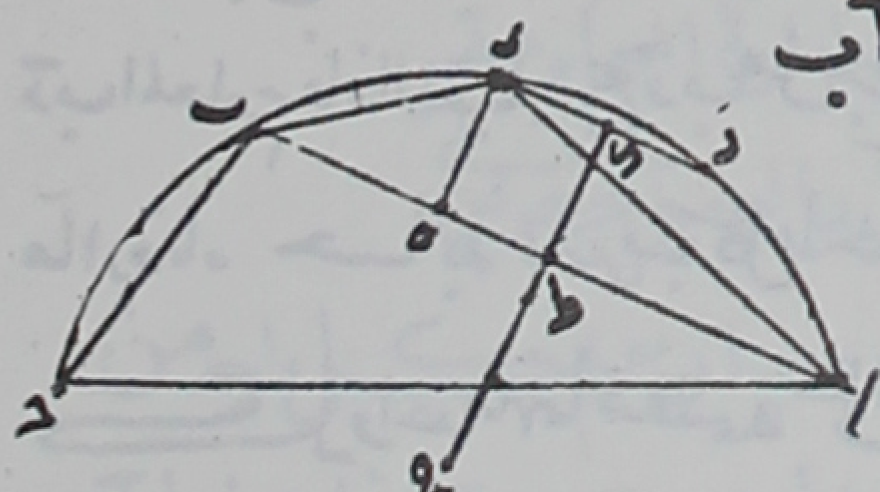
آب وان نقصناه منه بقی بح وذلک ما اردناه حسابه

نضرب نصف مجموع ذلک الوترین فی نفسه ونلقیها اجمع

اجتمع من نصف مضروب القطر في نفسه وناخذ جذر ما بقي فان اردنا الوتر الاطول زدنا هذا
البدر على نصف مجموع الوترين فيجتمع الوتر الاطول وان اردنا الوتر الاقصر نقصنا هذا الجذر من نصف
مجموعهما فيحصل الوتر الاقصر   وجه اخر في معرفة ذلك لي
لنعرض آ ه هي مساويا لكعب وسوى آ ر مساويا لـ ب ج لخط ب ر منقسم بنصفين على ه وقد زيد فيه آ د
يكون مجموع مربعي ب آ آ ر اعني مربع آ ج مساويا لضعف مربعي ب ه ه آ فتى القينا من مربع آ ج ضعف مربع
آ ه المعلوم بقي ضعف مربع ه ب فـ ه ب معلوم فان زدناه على آ ه اجتمع

وتر آ ب وان نقصناه منه بقي آ ر المساوي لـ ب ج واذا استعملنا انصاف
ما استعملناه خف علينا العمل لان انصافها على نسبة الاضعاف
وحسابه كما تقدم بعينه   معرفة وتر فضل ما بين قوسين معلومتي الوتر من قبل
وتر مجموعهما ومعرفة وتر مجموعهما من قبل وتر تفاضلهما لابي نصر بن عراق
قال ليكن وترا آ د د ب معلومين ونجعل وتر د ج مساويا لوتر آ د ونصل ج آ ب فيكون وتر ج ب وتر
تفاضل ما بين قوسي آ د د ب ويكون آ ب وتر مجموعهما فان كان ج ب وتر التفاضل معلوما واردنا معرفة
آ ب وتر المجموع فمن المعلوم ان مربع آ د المعلوم يساوي ضرب آ ب المطلوب في ج ب المعلوم مع مربع
د ب المعلوم فاذا القينا مربع د ب من مربع آ د بقي ضرب آ ب في ج ب و ج ب معلوم فـ آ ب معلوم وذلك
ما اردناه. حسابه نضرب كل واحد من الوترين في نفسه وناخذ فضل ما بينهما يجتمع من
كل واحد منهما فنقسمه على وتر فضل ما بين قوسيهما فيخرج وتر المجموع وهو آ ب
وان كان آ ب معلوما واردنا معرفة ج ب وتر التفاضل فعلى مقتضى ما تقدم وذلك لان مربع آ د
يساوي مربع د ب وضرب آ ب المعلوم في ج ب المجهول حسابه نفضل نضرب كل واحد من الوترين
في نفسه وناخذ فضل ما بين المجتمعين فنقسمه على وتر مجموع قوسيهما فيخرج وتر التفاضل

معرفة وتر المجموع ووتر التفاضل بعضها من بعض لي
ليكن وترا آ د د ب معلومين ووتر مجموع قوسيهما وهو آ ب معلوم ونريد معرفة وتر فضل ما
بين قوسيهما وهو ج ب فلننزل عمود د ه على آ ب ولان مربع آ د ينقص عن مربعي د ب با ضعف
ضرب آ ب في ب ه فان نصف فضل ما بين مربعي آ د د ب اذا قسم على آ ب خرج ب ه وهو نصف



فضل ما بين وتر المجموع ووتر الفاضل حسابه نضرب كل واحد
من الوترين في نفسه وننقص اقل ما يجتمع من اكبرهما و
نقسم نصف ما يبقى على وتر مجموع قوسيهما فاخرج فنلقى
ضعفه من وتر المجموع فيبقى وتر الفاضل وان كان وتر جه الذي للفاضل معلوماً واردنا
معرفة آب وتر مجموع قوسيهما فانا نفصل هز مساويا لهب ونصل دز فيكون دز دب متساويان
ومربع اد نفضل على مربعي زد دا بضرب آز في دب اعني ضعف ضرب آز في زه لكن آز مساوٍ لجه
وآب معلوم حسابه نضرب كل واحد من الوتر الاقصر ووتر الفاضل في نفسه ونجمعهما و
نلقي المبلغ من مضروب الوتر الاطول في نفسه ونقسم ما بقي على وتر الفاضل فاخرج نزيده
على وتر الفاضل فيجتمع وتر مجموع قوسيهما
معرفة وتر المجموع ووتر الفاضل كل واحد منهما بذاته من غير ان يحتاج احدهما الى الآخر لي
يكن وترا آب اج معلومين ونخرج در موازيا لاب فيكون مساويا لجه ونخرج عمود ده من منتصف
قوس اجه على آب فاما المعرفة وتر فضل ما بين قوسيهما فانا نخرج من مركز الدائرة وهو ح عمود
حطك على زد ومعلوم ان ما بين قوسي آب اجه اعني زد مجموع قوسي زد دا ولان حك هو
نصف وتر تمام زد اعني اجه المعلوم وحط نصف وتر تمام آب.

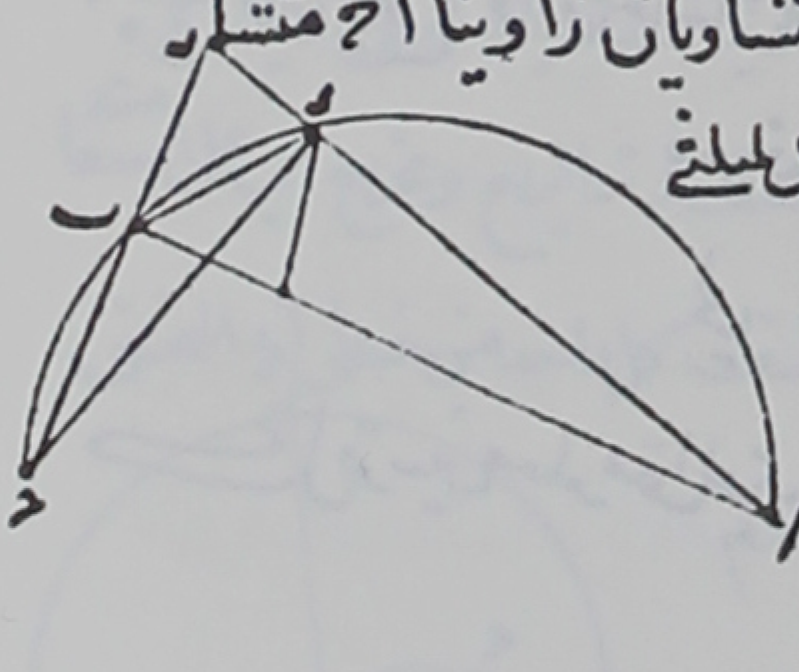


المعلوم ففضل ما بينهما وهو كط معلوم وده يساويه
وهب هو فضل الوتر الاطول على نصف مجموعهما ودب
القوي عليهما معلوم فوتر ضعفه معلوم وذلك ما اردناه حسابه نسقط مضروب
كل واحد من الوترين في نفسه من مضروب القطر في نفسه ونأخذ جذر ربع كل واحد
من الباقيين ونضرب فضل ما بين الجذرين في نفسه ونجمع المبلغ الى مضروب فضل الوتر
الاطول على نصف مجموع الوترين في نفسه ونقسم ما يجتمع على القطر فاخرج نلقيه من القطر
ثم نضرب ما بقي في نفسه ونلقيه من مضروب القطر في نفسه ونأخذ جذر ما بقي فيكون وتر
الفاضل واما المعرفة وتر مجموع قوسيهما وهو آد فان ده اذا صار معلوما كان آد ايضا معلوما
لانه نقوى عليه وعلى ه الذي هو نصف مجموع الوترين واذا صار آد معلوما كان اجه وتر ضعفه

ضعف قوسه فهو ایضا معلوم حسابه مثل فی ذلک ما مر فی حساب معرفة وتر الفاضل
حتی یحصل لنا فضل ما بین الجذرین مضروبا فی نفسه ونزید علیه مضروب نصف مجموع الوترین
فی نفسه ونقسم ما اجتمع علی القطر فاخرج فلقیه من نصف القطر ونضعف القطر ونضعف
الباقی ونضرب ذلک الضعف فی نفسه ونلقیه من مضروب القطر فی نفسه ونأخذ جذر
ما بقی فیکون وتر مجموع تینک القوسین المعلومتی الوترین

معرفة وتر الفاضل ووتر المجموع کل واحد منهما
بذا تر لابی نصر بن عراق فی کتابه الموسوم بالمجسطی الشاهی

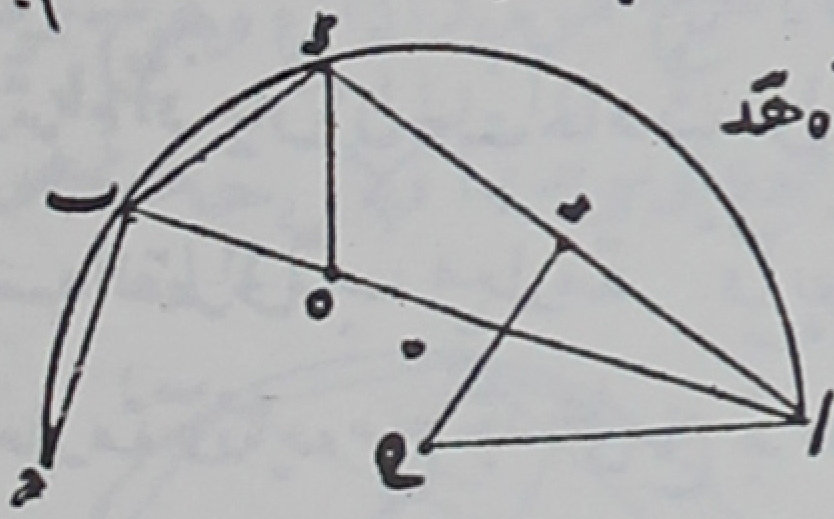
قال کل قوسین معلومی الوترین فان وتر فضل ما بینهما معلوم ووتر مجموعهما معلوم مثاله
وترا آد دب فی دائرة آدجـ معلومان فاقول ان وتر تفاضل قوسیهما ووتر مجموعهما
معلوم برهانه انا ناخذ قوس دجـ مساویة لقوس آد ونخرج جب علی استقامته من نقطة ب
ونزل علیه من نقطة د عمود دز فلان دب معلوم ونسبة دب الی بز کنسبة القطر الی وتر تمام آد
لان زاویة دبز بمقدار قوس آد وزاویة دزب قائمة واذا اخرج من نقطة آ قطر الدائرة واخرج
وتر تمام آد تبین ان المثلث الحادث من القطر ووتر آد ووتر تمامه متشابه لمثلث دزب فان
نسبة القطر الی دب معلومة وایضا نسبة مربع جد الی مربع بد معلومة فنسبته الی الزیادة
معلومة وزیادة مربع جد علی مربع بد هو زیادة مربع جد الی مربع بز فنسبة مربع جد الی کل واحد
من مربعی جد بز معلومة ونسبة القطر الی بز قد فرضت معلومة فنسبة القطر الی کل واحد
من بز جد معلومة فیبقی جز معلوما ونصل ایضا آب وننزل علیه من نقطة ه عمود ده فلان نسبة
آد الی آه کنسبة القطر الی وتر تمام بد تکون نسبة آد الی آه معلومة وایضا نسبة بد الی به
کنسبة القطر الی وتر تمام آد تکون نسبة بد الی هب معلومة فنسبة القطر الی کل واحد
من آه بد معلومة فنسبته الی مجموعهما معلومة وایضا لان آد جد متساویان زاویتا آجـ متساویتان
ولذلک زاویتا زه متساویتان تکون آه مساویا لجز ولان بد مشترک للمثلثین
دبز دبه وزاویتا دبز دبه متساویتان تکون به مساویا لبز
فتبین ان فضل آه علی به تکون مساویا لجب وذلک ما اردنا ان نبین



حساب ذلك لوتر الفاضل نضرب الوتر الاقصر فى وتر تمام قوس الاطول الى نصف الداىرة ونقسم
المجتمع على القطر فيخرج المحفوظ الاول ثم نضرب كل واحد من الوترين فى نفسه ونحفظ فضل
ما بين المجتمعين على مضروب المحفوظ الاول فى نفسه وناخذ جذر الجملة ونلقى منه المحفوظ الاول
فيبقى وتر الفاضل حساب ذلك لوتر المجموع نضرب الوتر الاطول فى وتر تمام قوس الاقصر الى نصف
داىرة ونقسم المجتمع على القطر فيخرج المحفوظ الثانى فمتى جمعنا المحفوظين الاول والثانى كانت
الجملة وتر مجموع القوسين ومتى نقصنا احدهما من الاخر كان الباقى وتر الفاضل القوسين وذلك ما اردنا

معرفة وتر الفاضل ووتر المجموع كل واحد منهما بذاته
نظر لوسطى شبيه بالذى تقدم لابى نصر منصور بن على بن عراق

وترا آد د ب هما المعلومان وقوس آد تساوى قوس ده فوتر المجموع آب ووتر الفاضل ج ه ونخرج
من المركز وهو ح عمود ح ر على آد ونصل آح فيكون زاويتا اح د د ب ا متساويتان لان زاوية د ب ا
مركبة على قوس آد من المحيط وزاوية اح ر على نصفها من المركز متشابه مثلثا آرح ه ب د فنسبة
آح نصف القطر الى ح د نصف وتر تمام قوس آد الى نصف الداىرة كنسبة د ب الى ب ه فـ ه معلوم

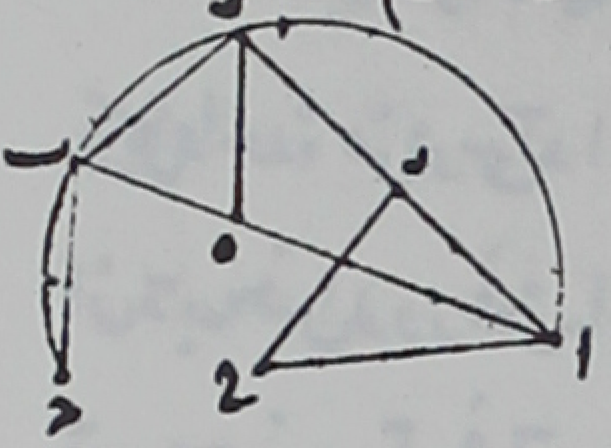


ود ب تقوى على ب ه ه د فه د ايضا معلوم و د ب تقوى على آه ه د
فآه معلوم فاذا جمعنا آه ه ب اجتمع وتر المجموع واذا نقصنا
ه ب من آه بقى وتر الفاضل حسابه نضرب نصف وتر
تمام قوس الوتر الاطول الى نصف الداىرة فى الوتر الاقصر ونقسم المجتمع على نصف القطر فيخرج المحفوظ
الاول ونضرب هذا المحفوظ الاول فى نفسه ونلقى المبلغ من مضروب الوتر الاقصر فى نفسه
وناخذ جذر ما بقى فهو المحفوظ الثانى ونضرب هذا المحفوظ الاول فى نفسه ونلقى ما اجتمع
من مضروب الوتر الاطول فى نفسه وناخذ جذر ما بقى فان جمعنا هذا الجذر والمحفوظ الاول
اجتمع وتر المجموع وان نقصنا المحفوظ الاول من هذا الجذر بقى وتر الفاضل وذلك ما اردناه

معرفة وتر المجموع ووتر الفاضل
لى فى علل زيج حبش

كل قوسين معلومتى الوتر فى داىرة معلومة القطر فان كل واحد من وتر مجموعهما ووتر فضل ما

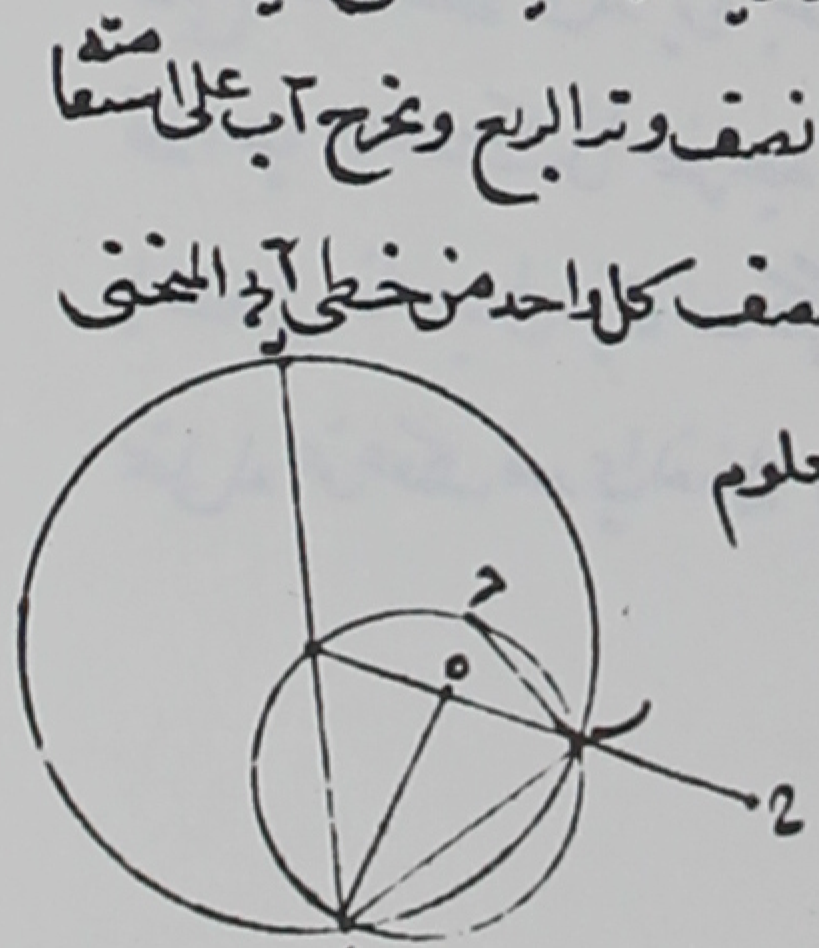
مابينهما معلوم مثاله قوسا آد دب معلومتا الوتر في دايرة معلومة القطر ونصل آب فيكون وتر
مجموعهما ثم نفرض قوس دج مساوية لقوس آد ونصل آج فيكون وتر فضل ما بين قوسي آد دب فاقول
ان كل واحد من آب آج معلوم برهانه انا نخرج من المركز وهو ح عمود دح على آد ومن ة
عمود ده على آب ونصل آج فلان زاوية احد على نصف القوس التي عليها زاوية دبه يكونان متساويين
وتشابه مثلثا احد دبه القايمي الزاوية فيكون نسبة آد الى آح كنسبة ده الى دب فيكون ده معلوما
ودب يقوى على ده هب فهب معلوم وآد يقوى على ده ها فها معلوم فآب الذي هو مجموع آه هب
معلوم وده نصف خط آج المنحني بفضل ما بين آه هب اذن ساوي هج فهو معلوم ووجه حسابه



ان نضرب الوتر الاقصر في نصف الوتر الاطول ونقسم المبلغ على نصف القطر
فيخرج العمود ونسقط مضروب العمود في نفسه من كل واحد من مضروبي
الوترين كل واحد على حدة في نفسه ونوخذ جذر البقيتين
فان جمعا اجتمع وتر مجموع القوسين وان اخذ فضل ما بينهما كان مساويا لوتر فضل ما بينهما وقد استبان
ان لوتر المجموع ووتر التفاضل اشتراكا في الاسم وذلك ان وتر دب وتر تفاضل ما بين قوسي آد دب
وهو بعينه اعني آب وتر مجموع قوسي آد آحب فلذلك يسهل معرفة احدهما بالطريق التي سنحت و
سيسنح منها لعلم الاخر بذلك الطريق ويمكن استخراج امهات الاوتار بهذه الخاصية على مثال
استخراجنا لها في علل زيج حبش وانا احكيها ههنا فان الموضع لايق به

استخراج وتر المثمن في الدايرة المعلومة القطر

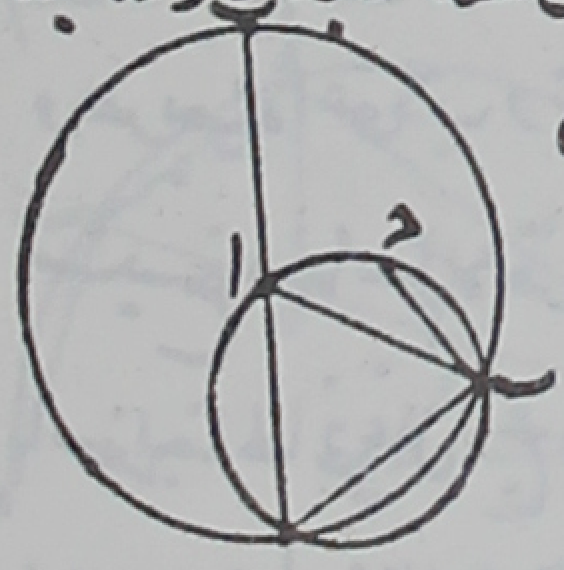
فليكن قد ثمن محيط دايرة دب د المعلومة القطر ونصل آب فيكون وتر الثمن فاقول انه معلوم
برهانه انا نخرج قطر آر ولنكن المركز ه ونصل آب ونخرج عمود ده على آب ونديره على مثلث آدب
دايرة ونفصل قوس دج منها مساوية لقوس آد لان ده نصف وتر ضعف الثمن فانه نصف وتر
الربع وزاوية داب نصف ربع زوايا قايمة فهي اذن نصف قايمة وزاوية آهد قايمة فتبقى زاوية اده
نصف قايمة فخطا آه هد متساويان وكل واحد منهما نصف وتر الربع ونخرج آب على استقامته
حتى يصير هج مساويا لها فمعلوم ان آج دج متساويان لان عموده نصف كل واحد من خطي آج المنحني
وآج المستقيم ومربع ادما ولمربع دب المطلوب ومربع ب معلوم



فی تح المنحنی ح ذ ذ ت اذن معلوم وحسابه ان یلقی نصف القطر من ضعف وتر الربع ونضرب الباقی
فی نصف القطر ونسقط المبلغ من مضروب نصف القطر فی نفسه ونوخذ جذر الباقی فیکون وتر الثمن
وسواء استخرجناه بهذا الطریق او من وتر الربع تمام تقدم فی معرفة وتر نصف کل قوس معلومة الوتر

استخراج وتر العشر

ولیکن آب وتر العشر فاقول انه معلوم برهانه انا نخرج قطر د آ ز ولیکن المرکز آ ونصل آب ونذیر علی
مرکز آ دب دایرة ونفصل قوس ده منها مساویة لقوس آد ونصل ح ه فلان زاویة د آ ب تقابل مرکز آ
عند دور دایرة تره فانها تقابل من محیط دایرة ادب ضعفه ذلک وهو خمس دور وهما وخطا اد آب متساویان
وکل واحدة من قوسی آد اجب خمس الدور ولکن قوس ده مساویة لقوس آد فاذن قوس ده خمس الدور وقد تبین
ان قوس ب خمس الدور فقوسا ده به متساویتان وخط آه مخنی فی هذه الدایرة فمربع آد یساوی مربع
دب مع ضرب آد فی دب المنحنی ضرب آب فی ح ه فخط ادب کخط واحد مستقیم منقسم علی نقطة د
بنسبة ذات وسط وطرفین وقسمه الاطول وهو آد نصف القطر معلوم فالقسم الاصغر وهو دب
وتر العشر اذن معلوم وحسابه ان یزاد علی مضروب نصف القطر فی نفسه ربعه ویوخذ جذر



المبلغ وینقص منه نصف القطر فیبقی وتر العشر وذلک بحسب ما بین فی الشکل
الحادی عشر من المقالة الثانیة من کتاب الاصول فی قسمة الخط علی هذه
النسبة ولان خمس الدور هو ضعف عشره وتر ضعف کل قوس معلومة
الوتر معلوم فوتر الخمس اذا معلوم وذلک ما اردنا ان نبین

ومن هذه الاشکال بعد حصول امهات الاوتار فی الدایرة یمکن استخراج سایرها علی السبیل المسلوک
فی کتاب المجسطی فان بمعرفة اوتار الفاضل بعلم وترها بین السدس والخمس وبمعرفة اوتار الانصاف
ینتهی من اوتار الدرج الصحیح الی وتر ثلثة اجزاء وبمعرفة اوتار الاضعاف والمجموعات یحصل جمیع اوتار
الدرج المتفاضلة فی الدایرة بثلث درج فاما وتر الجزء الواحد من ثلثمائة وستین جزءا من جملة الدور
فقد اعیا الکل استخراجه واداهم ذلک الی استنباط صنوف الحیل لاستخراجه بالمقرب لا
بالتحقیق فاجعل ایدک الله فکرک فیما جمعته لک وتحققه حتی ینفتح علیک به ینابیع الفطنة و
یتجلی له عن عقلک صدی الغفلة وتتوصل به الی ما یدق عن افهام العوام وتختم بینی وبینک مواد

مواد الملام والحمد لله على منه العظام والصلوة على خير خلقه في الانام تمت

بعون الله تعالى وحسن توفيقه

انه هو الرحمن

الرحيم

١

IQBAL LIBRARY
The University of Kashmir
Acc. No. [redacted]
Author [redacted]
Title [redacted]

بخش دوم

مقدمهٔ کتاب استخراج الاوتار

الف - متن عربی مقدمهٔ کتاب «استخراج الاوتار» ازروی نسخه‌های چاپی (چد : ص۳ - چم : ص۳۲)

بسم الله الرحمن الرحيم ، كتاب ابى الريحان محمد بن احمد البيرونى فى استخراج الاوتار فى الدائرة بخواص الخط المنحنى الواقع فيها: وقفت على ما استعلمتنيه من السبب الداعى اياى الى الولوع بتصحيح دعوى لقدماء اليونانيين، فى انقسام الخط المنحنى فى كل قوس بالعمود النازل عليه من منتصفها، والتنفير عن خواصه حتى نسبتنى لاجله ، الى الاشتغال بما يذكره محمد بن زكريا الرازى من فضول الهندسة ،من غير أن يشعر بحقيقة الفضول التى هى الزيادة على الكفاية فى كل شىء .

فانه لو شعر بها لوجد نفسه ، مرتبكة فى فضول الوسوسة التى أفسد بها ، قلو بامتجافية عن الديانة ،أو شرهة بفضول الدنيا الى العتاد والرياسة، وليس مقدار الكفاية من الهندسة ،ماظنه الرازى و أشار بفلسفة اليه ثم عادى باقيه ، ولم يزل الناس أعداء ما جهلوا.

قال الله تعالى (و اذلم يهتدوا به فسيقولون هذا افك قديم) ، وأنت لو تحققت

ماهية الهندسة ، وأنها معرفة نسبة الاجناس الواقعة تحت الكمية بعضها الى بعض ، و أنها هى التى تتوصل بها لمعرفة مقدار كل مانحتاج اليه ، من مزروع و مكيل و موزون ، مابين مركز العالم و بين أقصى محسوس عنه ، وعرفت أن بها تعقل الصور مجردة عن المواد ، ويتصور حقيقة البرهان تصور انطباع ، حتى لايذهب على القيم بها مايذهب على كثير من المحصلين فى المنطق مهما الزم مسلك صناعته ، ثم نرتقى بوساطة التدرب بها من المعالم الطبيعية الى المعالم الالهية ، التى تمتنع لغموض معانيها وصعوبة مآخذها ، ودقة طرايقها و جلالة أمرها ، وبعد تصورها عن أن ينقاد لكل أحد ، أو يدركها من عدل عن سنن البرهان لماعدلتنى عن ذلك .

و ذلك أن تفعل اذا لم أقتنع فى المطلوب بالطريق الموصل اليه ، دون تضييع الزمان فى طلب طرق أخرى اليه ، ثم لم يسفر فى آخر الامر عن نتائج هى عمدة علم الهيئة .

فأما كثرة الطرق ، فسبب جمعى اياها تدريب المتعلم بتنوعها ثم اتحادها ، ولانها كانت لى فى الغربة مؤنسة ، ولا سامر من فارقتهم من الاصدقاء عمد كرة ، وقد أثبتها لك لتتأملها و تعرف كيف آل جميعها الى النكتة الواحدة ، وماتثمره الفوائد فى العاقبة ، فيتمهد عذرى لديك فيما حمت حوله من عذلى ، ورب لائم مليم وما التوفيق الا من عند الله تعالى .

ب ـ ترجمهٔ مقدمهٔ فوق

آگاه شدم بر آنچه ازمن پرسیده بودی که به چه سبب به اثبات این ادعای قدمای یونانیان که «چون از وسط کمانی از دایره عمودی بر خط شکستهٔ محاط در آن کمان فرود آید آن خط شکسته را به دو قسمت متساوی تقسیم می کند» اصرار می ورزم و در یافتن خواص آن می کوشم. حتی به این جهت مرا به آنچه که **محمد بن زکریای رازی** «فضول هندسه» خوانده است نسبت داده بودی. ولی او خود از حقیقت «فضول» که افزودن بر اندازهٔ کفایت در هر چیز است آگاه نبود، و گرنه گرفتار فضول وسوسه ای

نمی‌شد که با آن دلهای گریزان ازدین، یا آزمند به‌فزونی مال وریاست، راتباه کرده است. اندازهٔ کافی هندسه آن نیست که رازی پنداشته ودرفلسفهٔ خود به آن اشاره کرده(۱) وسپس با بازماندهٔ آن دشمنی نموده‌است. آری هنوزمردمان دشمن چیزهایی هستند که نمی‌دانند.

خدای تعالی گفته است: و اذ لم یهتدوا به، فسیقولون هذا افك قدیم(۲) (= وچون به آن راه نبردند، می گویند این دروغی کهن‌است). واگر تودرماهیت هندسه تحقیق می کردی ومی‌دانستی که آن شناختن نسبت جنسهای واقع درزیر کمیت به‌یکدیگراست، واینکه وسیله‌ای‌است که با آن به‌شناختن هرچه پیمودنی وسنجیدنی است که‌میان‌مرکزجهان ودورترین نقاط محسوس آن‌واقع‌است‌دسترس حاصل‌می‌شود، ومی‌دانستی که بوسیلهٔ هندسه تعقل صورتهای مجرد ازماده امکان پذیراست، و درنتیجهٔ ممارست آن‌حقیقت برهان‌درذهن نقش می بندد، وکسی که باهندسه سروکار دارد هراندازه لازم باشد درصناعت خود پیش میرود و مانند بسیاری ازمحصلان منطق به‌بیراهه نمی‌افتد، ومی‌دانستی که باتمرین درهندسه ازنمودارهای طبیعت به نمودارهای الهی ارتقا حاصل می‌شود، که به علت پیچیدگی معانی و دشواری اصول وباریکی راهها وعظمت‌امرودوری تصور آن‌ازذهن، راه‌یافتن به‌آن ودریافتن آن برای کسی که‌از راههای‌روشن برهان عدول کند ممکن نیست، مرا به‌این‌کار ملامت نمی کردی.

واین برای آن‌است که‌اگر برای رسیدن به‌مطلوب ازراهی که می‌خواهد به آن برسد بدون تباه کردن وقت توفیق نیافت، درصدد جستن راه دیگری برآید تاازنتایجی که به‌آن می‌رسد ودرعلم هیئت اهمیت دارد محروم نماند.

واما اینکه من راههای فراوان راجمع آورده‌ام، برای آن است که متعلم با گونه‌گونی آنها و اینکه همه به یك نتیجه می‌انجامد، تمرین کند و آشنا شود. ودیگر اینکه چنین کاری برای من درغربت مونسی بود و با دوستانی که ازایشان دورافتاده بودم حدیث می گفتم واین کاریادآور ایشان بود. همه را ثبت کردم تاخوب درآنها تأمل کنی وبدانی که چگونه باز گشت همهٔ آنها به یك نکته‌است. فوایدی که‌درپایان نصیب تومی‌شود عذرخواه پرنویسی من خواهد بود که سبب سرزنش‌کردن توشده است. و چه بسیار ملامت گر که خود سزاوار ملامت شدن است. و توفیق جزازجانب خدا نیست.

ج- مقدمهٔ «استخراج‌الاوتار» ازروی نسخهٔ خطی «عل»

متن عربی‌این‌مقدمه درصفحات ۱۳و۱۴ کتاب‌حاضر ازروی نسخهٔ خطی«عل» به چاپ رسیده‌است. ازتطبیق این‌مقدمه بامقدمهٔ نسخه‌های‌چاپی «استخراج‌الاوتار» که در صفحات ۵۷ و ۵۸ کتاب حاضر به‌چاپ رسیده است می‌توان مشاهده کرد که قسمت‌اول یعنی ۱۳سطراول مقدمهٔ‌نسخهٔ‌خطی«عل»با۲۱سطراول‌مقدمهٔ نسخه‌های چاپی‌تقریباً باهم‌یکی‌است، بااین‌تفاوت که‌درمقدمهٔ‌نسخهٔ«عل»نام **محمدبن‌زکریای رازی** ذکرنشده‌است. اماعبارات‌زیر که‌ازسطرچهاردهم به‌بعدنسخهٔ«عل» آمده‌است باقسمت اخیرمقدمهٔ نسخه‌های چاپی اختلاف دارد.

« ... ولك ایدك الله ان تعذلنی علی ماذکرت لوکنت تولیت استخراج تلك الطرق باسرها فضیعت الزمان فیما یکفی منه الیسیر اولم یحصل منها آخر الامرماهوالعمدة فی‌علم الهیئة اعنی استخراج الاوتار فی الدایره و نسب مقادیرها الی مقدار القطرو اجزائه المفروضة له. لکن هذه الدعوی وقعت بین یدی جماعة من فضلاء اهل هذا

العلم فاجتهد کل منهم فی تصحیحها و اقامة البرهان علیها . فاجتمع عندی منها ما کنت اکرر النظر فیه حبا للعلم و تعلیلا للفوأد عن غلیل الاشواق الی اولئك الفضلاء ایام الغربة و...(*) ذلك صرف الفکرة الیه حتی شارکهم فی اقامة البرهان علیه علی مایبین فی خلال الکلام و صار اصلا من الاصول الهندسیه ثبت علیه جوابات کثیره من المسایل سئلتها و قد جمعت کل ذلك لك و اصفت کل طریقه الی صاحبها کما هو عادتی لتنظر فیها و تعرف ما آل جمیعها الی النکته الواحدة و ما سنح منه اخیرا من الوصول الی معرفة الاوتار فیتمهد عذری لدیك فیما حمت حوله من عذلی...

د ـ ترجمهٔ آزاد عبارات فوق به فارسی :

و تو، که خدایت تأیید کناد ، در آن صورت حق داشتی مرا بر آنچه گفتم سرزنش کنی که من به استخراج همهٔ این روشها می پرداختم و وقتم را در چیزی تباه می کردم که به دست آوردن اندکی از آن کافی می بود، با اینکه بالاخره در نتیجهٔ این کوششها آنچه در علم هیئت اهمیت اساسی دارد، یعنی استخراج وترهای دایره و نسبتهای مقادیر آنها به قطر و اجزای مفروض آن به دست نمی آمد. اما این قضیه به دست عده‌ای از فضلای اهل این علم افتاد و هریك از آنها در تصحیح و اثبات آن کوشیدند و عده‌ای از این برهانها نزد من گرد آمد و من به‌سبب دلبستگی به علم و فرو نشاندن آتش شوقی که به آن دانشمندان در ایام غربت داشتم در آنها مکرر نظر می کردم و در آنها بسیار می اندیشیدم. تا آنجا که خود نیز چنانکه در متن کتاب دیده می شود برای آن قضیه برهانها آوردم و این قضیه یکی از اصول هندسی شد که به وسیلهٔ آن می توان جواب

(*)ـ در این موضع از نسخهٔ خطی (سطر اول از صفحهٔ دوم) کلمه‌ای نوشته شده که نتوانستم بخوانم.

بسیاری ازمسائل را که ازمن پرسیده شده‌بود به‌دست آورد.

پس همهٔ آنها را برای‌تو جمع آوری کردم و، همـان گونه که عادت من‌است، هرروش وطریقه را به نام صاحب آن ثبت کردم(۳) تاتـو درآنها نظر کنی و بدانی که همهٔ آنها به یك نکتهٔ واحد برمی گردد. ونتیجه‌ای که بالاخره ازآن یك نکته حاصل می‌شود دست‌یافتن به شناخت اوتاردایره‌است. واین خودعذرخواه من‌درپیش تواست که نمی‌بایستی مرا ملامت کرده باشی وچه بسا ملامتـگـر که خود سزاوار ملامت شدن است‌وتوفیق جزازجانب خداوند عزیزحکیم نیست.

یادداشتهای مربوط به‌بخش دوم

(۱)- محمدبن‌زکریای‌رازی کتابی باعنوان «کتاب الردعلی‌من‌اشتغل بفضول الهندسة» نوشته‌بوده‌است (رجوع کنید به‌ترجمهٔ‌فارسی «تاریخ‌الحکماء»، با مقابله و تصحیح و حواشی ومقدمه به‌کوشش خانم دکتربهین دارائی، تهران ۱۳۴۷ص۳۷۵-درمتن‌عربی «تاریخ‌الحکماء» چاپ (Lippert)، ص ۲۷۳ وهمچنین درترجمهٔ‌فارسی «الفهرست» توسط آقـای م.تجدد، ص۵۳۲ نام این‌کتاب درست ثبت نشده‌است. عنوان صحیح‌آن همان است‌که درفوق نوشته‌ام).

به عقیدهٔ‌آقای دکترمهدی محقق اینکه بیرونی‌می گوید رازی مقدار کفایت ازهندسه را در فلسفهٔ خود اشاره‌کرده ناظراست به عبارتی‌که رازی درکتاب «السیـرةالفلسفیـه» آورده است (رجوع کنید به «السیرةالفلسفیة» چاپ یونسکو به‌اهتمام دکترمهدی محقق، تهران ۱۳۴۳ص۱۲۲).

(۲)- قسمت‌آخرازآیهٔ یازدهم سورهٔ۴۶ (سورةالاحقاف).

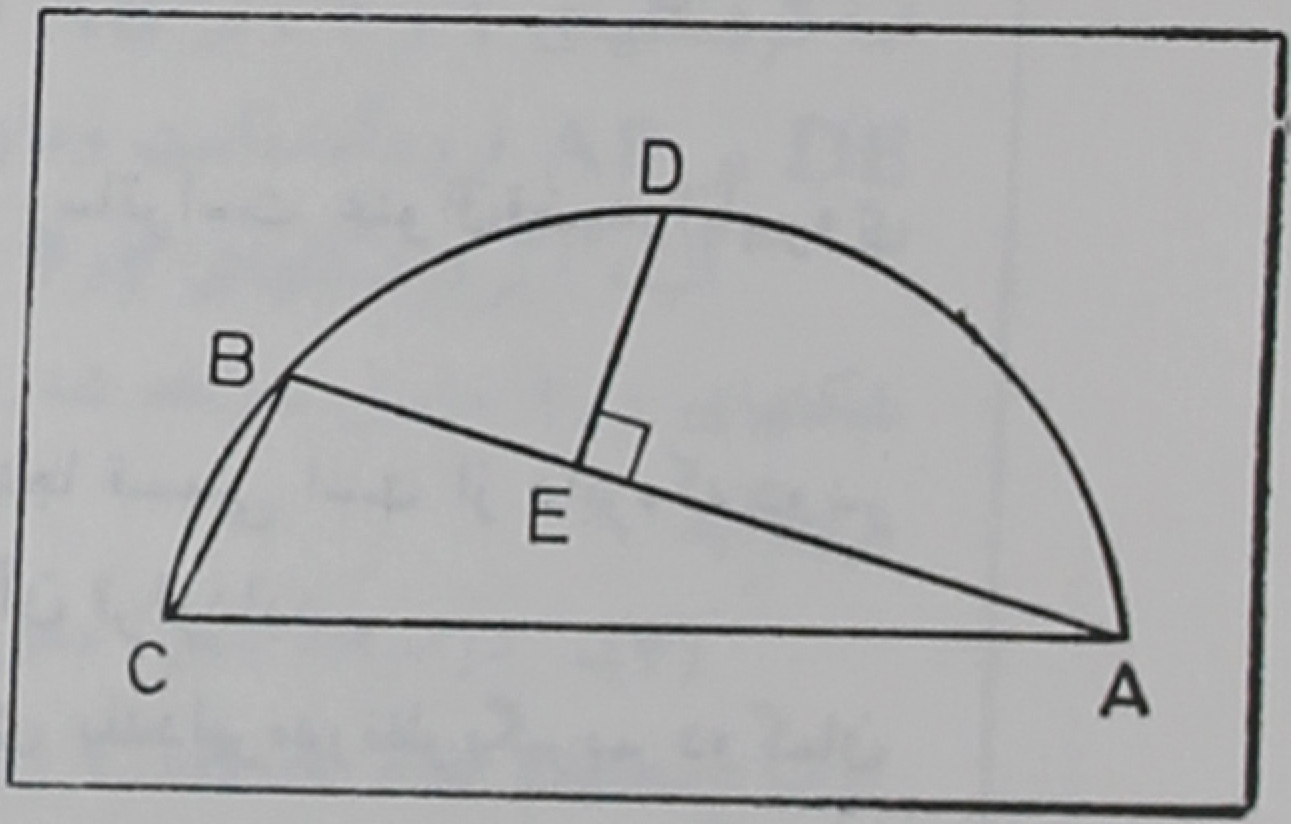
(۳)- این حقیقتی‌است انکارناپذیر و استاد بیرونی ازاین راه خدمت بزرگی به تاریخ ریاضیات‌کرده است.

بخش سوم

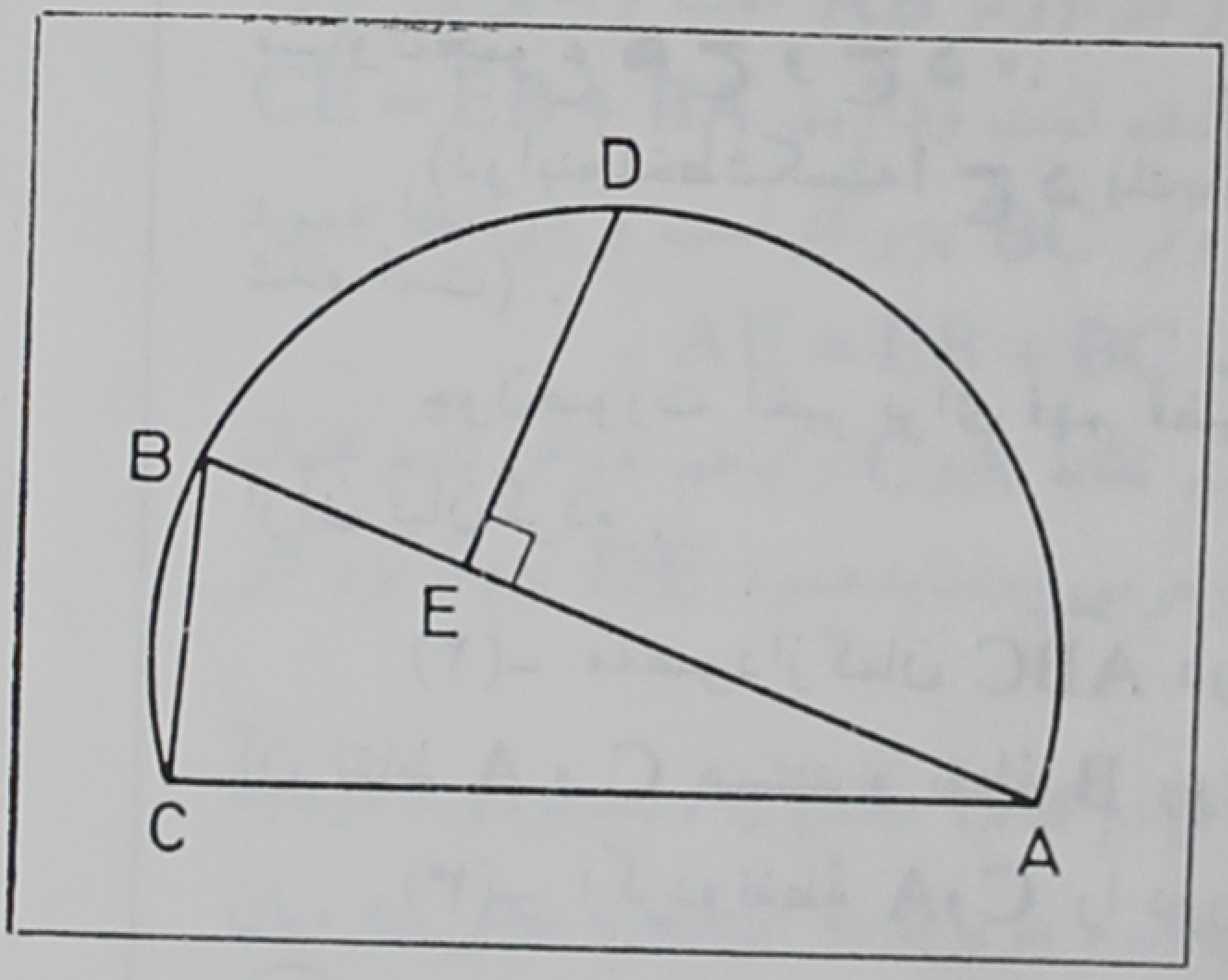
قضایای کتاب استخراج الاوتار

الف ـ عنوان قضیهٔ اول

عنوان قضیهٔ اول(۱) ـ اگر خط شکستهٔ ABC که دوضلع آن AB و BC متساوی نیستند در کمان $\widehat{ABC}$ از دایره‌ای(۲) محاط باشد و از نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$ عمود DE را بر ضلع بزرگتر خط شکسته فرود آوریم، پای این عمود وسط خط شکستهٔ ABC خواهد بود(۳).



(شکل۱)



(شکل۲)

فرض : اولاً $\widehat{ABC}$ کمانی است از دایره و $AB>BC$
ثانیاً نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$ است
ثالثاً $DE \perp AB$

حکم : $AE = EB + BC$

[رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۴) ذیل]

یادداشتهای مربوط به عنوان قضیهٔ اول

(۱)- این قضیه در نسخه‌های کتاب «استخراج الاوتار» (عل : ص۲- چد : ص۴ - چم : ص۳۳) به صورت زیر عنوان شده‌است :

«اذا عطف فی قوس ما من دائرة خط مستقیم علی غیر تساو وانزل علیه من منتصف تلك القوس عمود فانـه ینقسم بنصفین» (در اینجا مقصود از خط مستقیم خط شکسته است) .

همین قضیه در کتاب «قانون مسعودی» (ج۱ ص۲۷۳) به‌صورت زیر عنوان شده‌است :

«مقدمة لارشمیدس مبرهنة بغیر برهانه : فلیکن قوس **ا ج د** معطاة و قد انحنی تحتها خط **ا ج د** المستقیم و ننزل من **ب** منتصف القوس عمود **ب ه** علی اعظم قسمی الخط المنحنی فاقول انه قسمه بنصفین علی **ه**. اعنی ان **ا ه** مساو لمجموع **ه ح** و **ج د**».

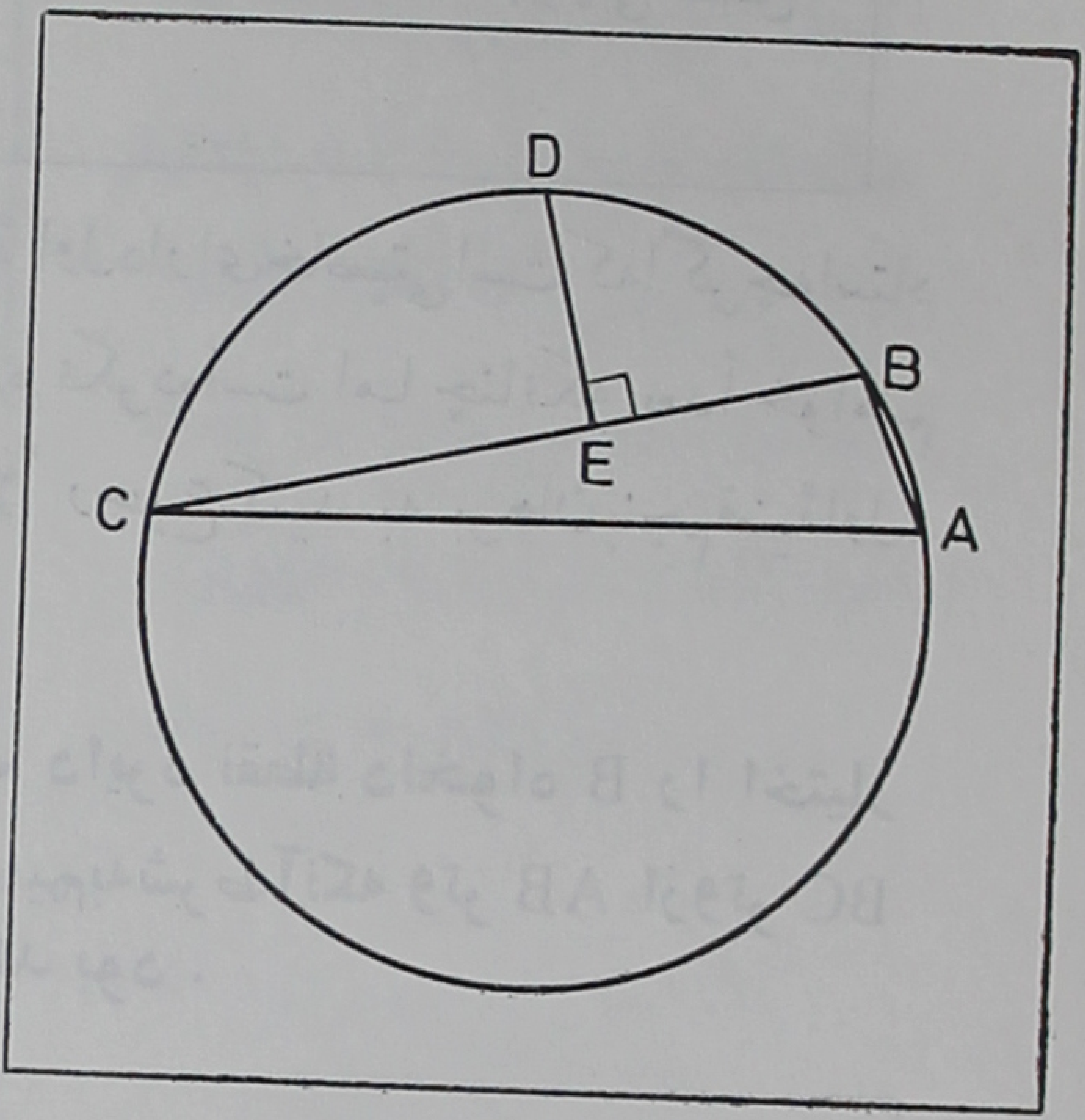
(در اینجا خط شکسته **ا ج د** یك بار «مستقیم» و یك بار «منحنی» خوانده شده است) .

چون صورت اخیر برای فهم قضیه رساتر است عنوان قضیه را با پیروی از آن بیان کردم .

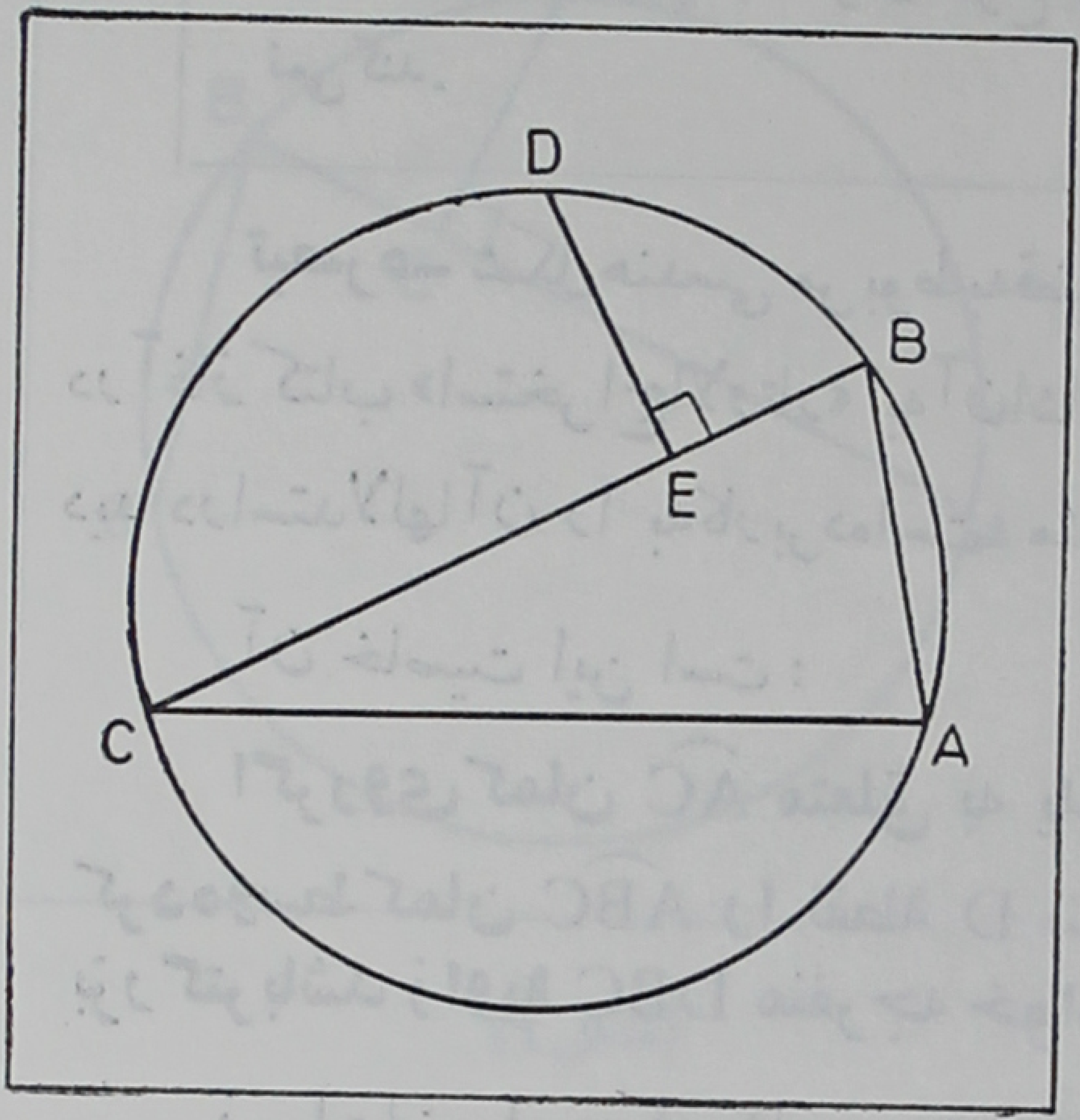
(۲)- مقصود از کمان $\widehat{ABC}$ در اینجا قسمتی است از دایره که دو سر آن نقاط A و C هستند و نقطهٔ B روی آن قرار دارد .

(۳)- اگر دو نقطهٔ A و C را در روی یك دایره در نظر بگیریم دو کمان $\widehat{AC}$ پدید می‌آید که پاره‌خط AC وتر مشترك آنها است. قضیهٔ مورد بحث

دربارهٔ هریک از این دو کمان (خواه کوچکتر از نیمدایره و خواه بزرگتر از نیمدایره وخواه مساوی با نیمدایره) صحیح است، به شرط آنکه نقطهٔ D (وسط کمان $\widehat{AC}$) ونقطهٔ اختیاری B هردو روی یک کمان $\widehat{AC}$ واقع باشند. (نه اینکه وسط یکی از دو کمان $\widehat{AC}$ را D بنامیم و نقطهٔ B را روی کمان دیگر $\widehat{AC}$ اختیار کنیم) ـ به شکلهای زیر و نیز به شکلهای ۱و۲ نگاه کنید:



(شکل۳)



(شکل۴)

درشکلهای فوق وتر BC بزرگتر از وتر AB است و بنابراین عمود DE بروتر بزرگتر یعنی BC فرود آمده است وداریم $CE = EB + BA$ اما درشکلهای ۱ و ۲ وتر AB از وتر BC بزرگتراست و درآنجا عمود DE بر AB فرودآمده‌است وداریم $AE = EB + BC$.

البته اگر درشکلهای ۳و۴ اسم نقاط A و C راباهم عوض کنیم همان شکلهای ۱و۲ حاصل خواهد شد. درهرصورت باید عمود DE به‌وتر بزرگتر فرود آید.

(۴)ـ درنسخهٔ خطی «عل» و درکتاب «قانـون مسعـودی» دربارهٔ اوضاع مختلف نقاط A و B و C روی دایره مربوط به این قضیه بحثی به میان نیامده است. اما درنسخه‌های چاپی استخراج الاوتار (چد: ص ۵و۶ ـ

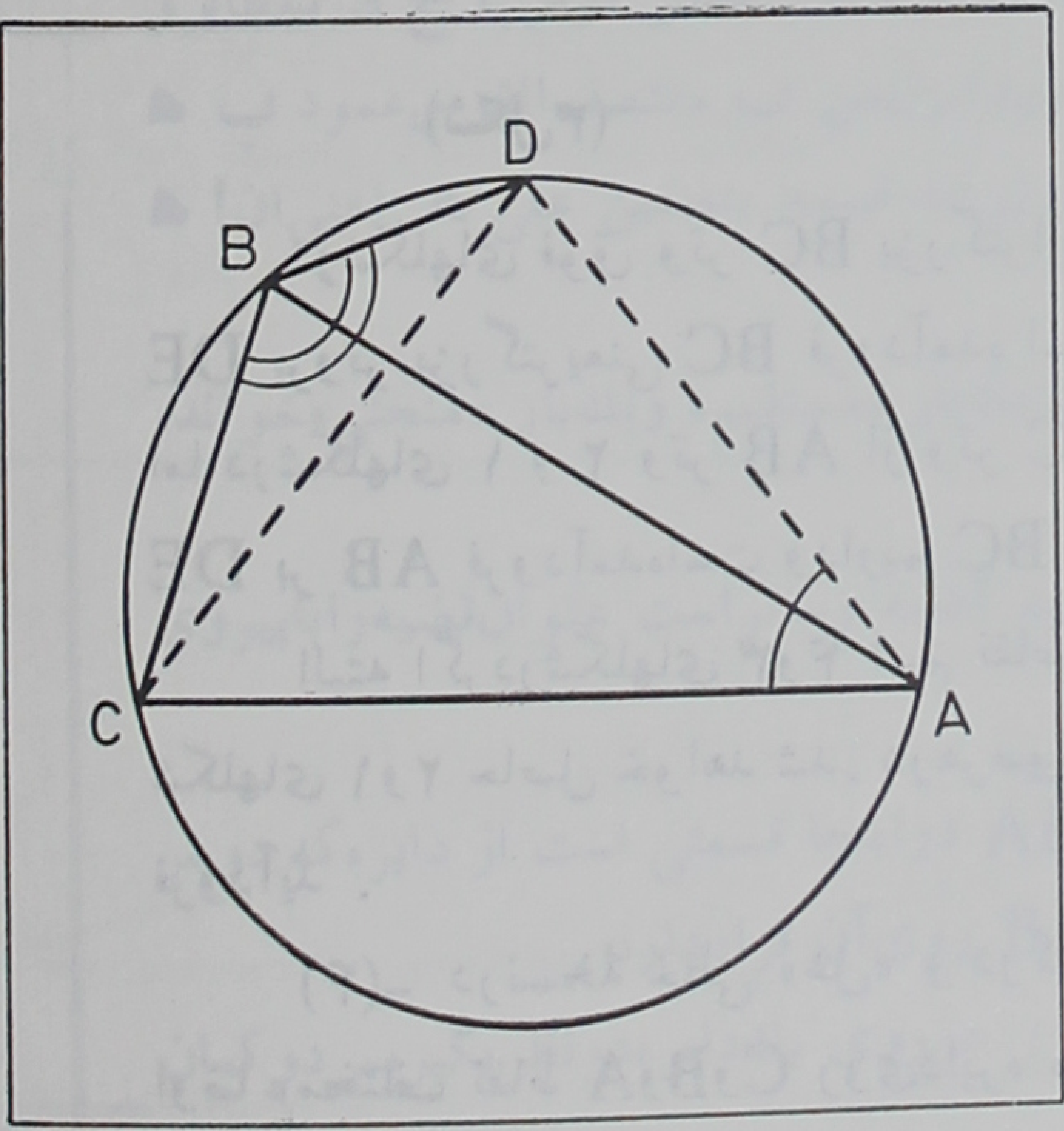
چم : ص ۳۳و۳۴) دربارهٔ اختلاف اوضاع نقاط A وB وC روی دایره مطالبی نوشته شده است (چد : ص۵و۶ - چم : ص۳۳و۳۴). چون قضیه به صورتی که در «قانون مسعودی» عنوان شده است چنانکه گفتم درهمهٔ حالات با در نظر-گرفتن شرایط مذکور صحیح است ذکر آن بحث را لازم ندیدم. در هر صورت برای اطلاع کسانی که نسخهٔ چاپی «چم» از «استخراج الاوتار» را در اختیار دارند خاطر نشان می کنم که قسمتی از آنچه آقای احمد سعیدالدمرداش در صفحهٔ ۳۵ آن چاپ به عنوان شرح نوشته است با گفتهٔ استاد بیرونی تطبیق نمی کند.

تبصره- شکل هندسی مربوط به قضیهٔ اول دارای خاصیتی است که اگر چه استاد در آغاز کتاب «استخراج الاوتار» به آن اشاره نکرده است اما چنانکه بعداً خواهیم دید در استدلالها آن را به کار برده است. مثلاً رجوع کنید به برهان پنجم قضیهٔ اول.

آن خاصیت این است :

اگر روی کمان $\widehat{AC}$ متعلق به یك دایره نقطهٔ دلخواه B را اختیار کرده وسط کمان $\widehat{ABC}$ را نقطهٔ D بنامیم به شرط آنکه وتر AB از وتر BC بزرگتر باشد زاویهٔ DBC منفرجه خواهد بود.

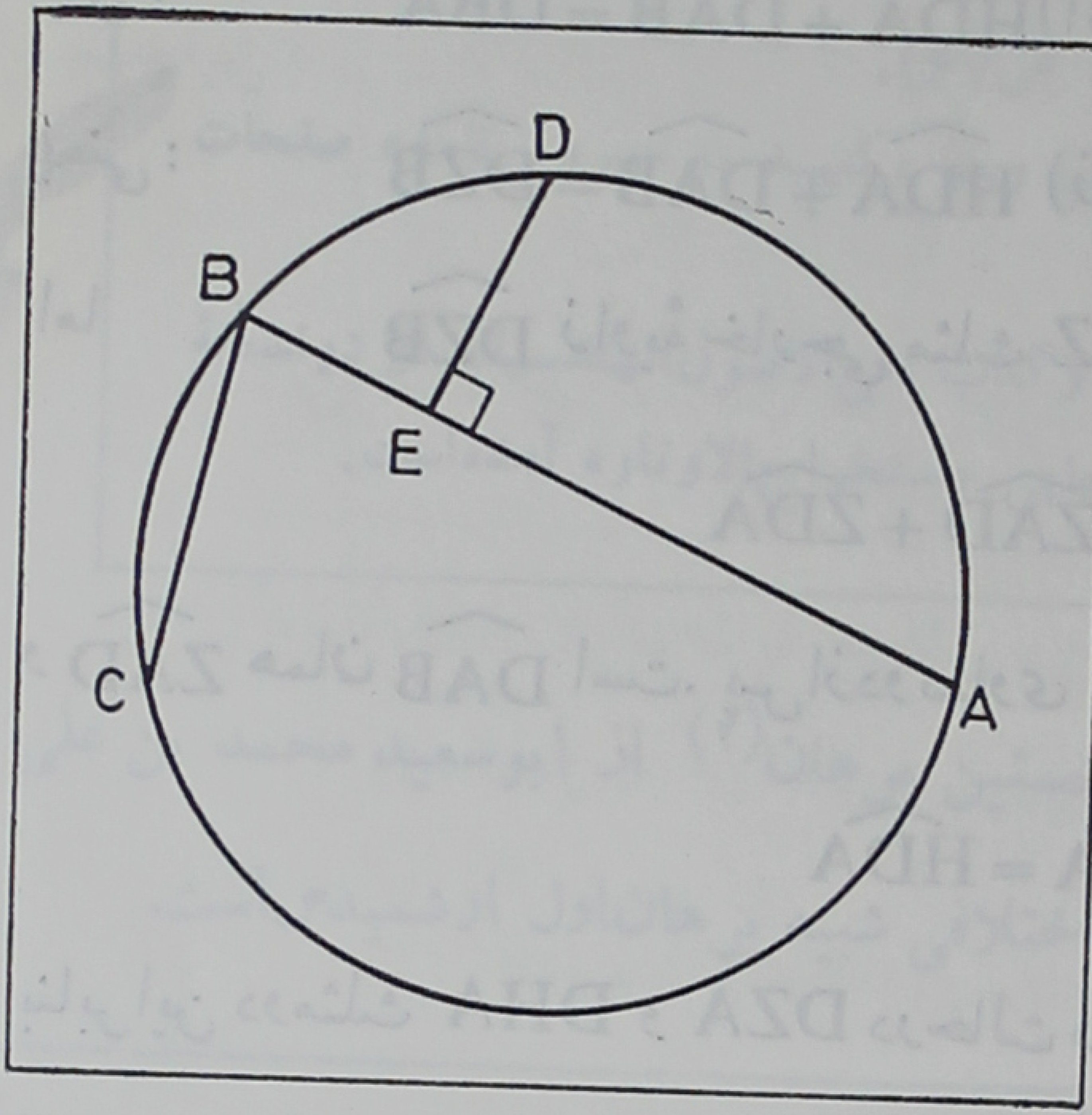
زیرا واضح است که مثلث ADC متساوی الساقین است (DA = DC) و بنا بر این زاویهٔ DAC حاده است. پس زاویهٔ DBC که مکمل آن است منفرجه می باشد.



(شکل ۵)

توجه کنید - چون شکل هندسی مربوط به قضیهٔ اول در همهٔ

برهانهایی که برای این قضیه ذکر خواهد شد مورد احتیاج است در آغاز هر برهان شکل را باقراردادهای زیر رسم کرده از تکرار ذکر این قراردادها خود داری خواهم کرد. البته درهر استدلال این شکل را که اساس کار است به وجه مناسب تکمیل خواهم نمود.



(شکل ۶)

در این شکل نقطهٔ D وسط کمان $\overset{\frown}{AC}$ از دایره و نقطهٔ B نقطهٔ دلخواهی متعلق به کمان $\overset{\frown}{ADC}$ و است به قسمتی که $AB > BC$ و نقطهٔ E پای عمودی است که از نقطهٔ D (وسط کمان $\overset{\frown}{ABC}$) بر وتر بزرگتر AB فرود آمده است.

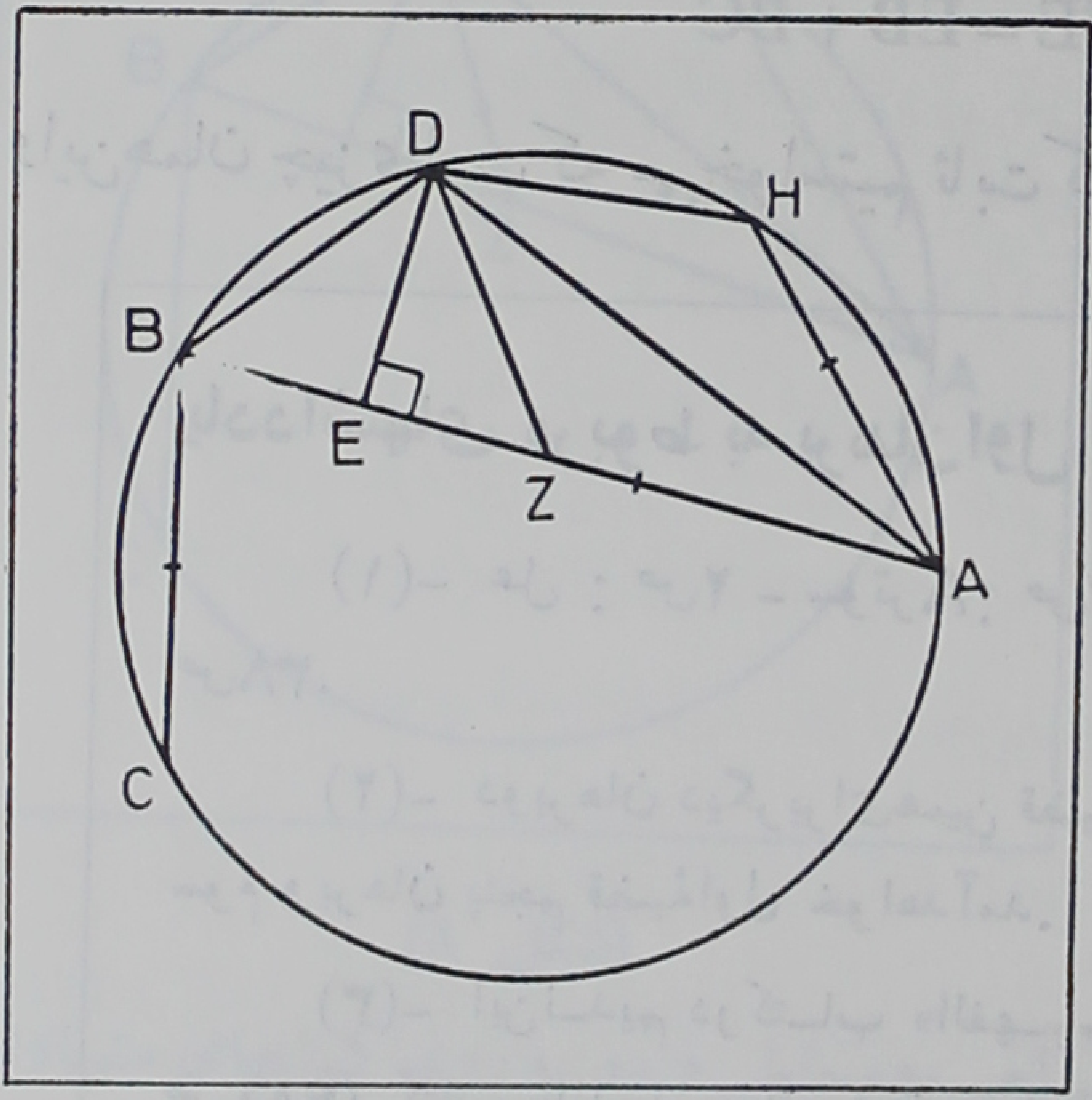
حکم قضیهٔ اول این است که:

$$AE = EB + BC$$

ب ـ برهانهای قضیهٔ اول

برهان اول قضیهٔ اول (۱)ـ

نخستین برهان (۲) از ارشمیدس در کتاب دوایر (۳) (و کتاب سارینوس ثیبائی (۴) فی الاصول الهندسیة (۵)).



(شکل ۷)

روی دایره کمان $\overset{\frown}{DH}$ را مساوی با کمان $\overset{\frown}{DB}$ جدا کرده DH و DB و HA را رسم می کنیم.

سپس روی EA پاره خط EZ را مساوی با EB جدا کرده DZ و DA را رسم می کنیم داریم : $DB = DZ$ (زیرا DE عمود منصف پاره خط BZ است)

$\widehat{HA} = \widehat{BC}$ (زیرا D وسط کمان ABC است و $\widehat{BD} = \widehat{DH}$)

پس : $\widehat{HDA} + \widehat{DAB} = \widehat{DBA}$ (اندازهٔ آنها یکی است)

یعنی : $\widehat{HDA} + \widehat{DAB} = \widehat{DZB}$ (زیرا مثلث DBZ متساوی الساقین است)

اما $\widehat{DZB}$ زاویهٔ خارجی مثلث ADZ است . پس :

$$\widehat{DZB} = \widehat{ZAD} + \widehat{ZDA}$$

و $\widehat{ZAD}$ همان $\widehat{DAB}$ است. پس از دو تساوی اخیر نتیجه می شود :

$$\widehat{ZDA} = \widehat{HDA}$$

بنابراین دو مثلث DHA و DZA در حالت دو ضلع و زاویهٔ بین آنها متساویند. پس $AZ = AH$ اما $AH = BC$ و $ZE = EB$ پس :

$$AZ + ZE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان اول قضیهٔ اول :

(۱)- عل : ص۲ - سوتر A : ص۱۳ و نیز ص۶۷- چد: ص۷ - چم: ص۳۸.

(۲)- دو برهان دیگر برای همین قضیه از ارشمیدس با عنوانهای برهان سوم و برهان پنجم قضیهٔ اول خواهد آمد.

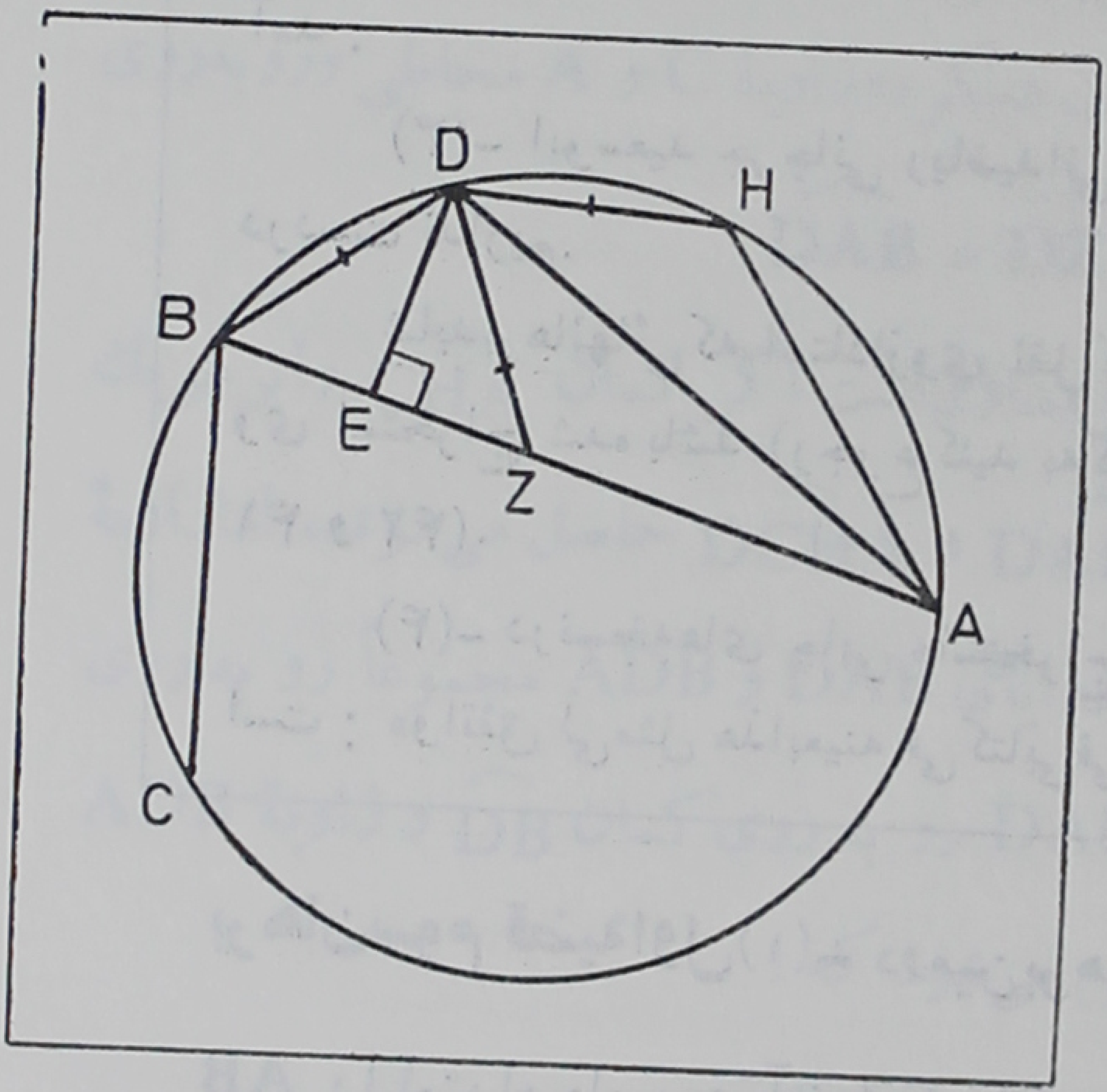
(۳)- ابن ندیم در کتاب «الفهرست» (ترجمهٔ فارسی الفهرست : ص۴۸۰) کتاب «الدوایر المماسة» را به نام ارشمیدس ثبت کرده است.

ولی مورخان ریاضی اروپایی ازوجود چنین کتـابی به نام ارشمیدس اظهار بی‌اطلاعی کرده‌اند (← هیث A: ص XXXVIII)ـ سوتر نوشته‌است که ممکن است این «کتاب‌الدوائـر» باکتاب «مأخوذات» ارشمیـدس رابطـه‌ای داشته باشد. به این معنی که شاید کتاب «مأخوذات» قسمتی‌یامختصری از «کتاب الدوائر» بوده‌باشد (← سوترA: ص۶۷).

(۴)ـ دربارهٔ سارینوس ثیبائی رجوع کنیـد به «بیرونی‌نامه» صفحات ۵۱۱ و۵۱۲.

(۵)ـ نام‌سارینوس ثیبائی وکتاب «فی‌الاصول‌الهندسیة» او درنسخهٔ «عل» نیست وفقط درنسخه‌های چاپی «استخراج‌الاوتار» آمده‌است.

برهان‌دوم قضیهٔ‌اول(۱) ـ نخستین برهان(۲) از ابوسعید محمد بن علی ضریر جرجانی(۳) ـ این برهان با اندك اختلافی شبیه برهان‌اول ارشمیدس است.



(شکل ۸)

کمان $\widehat{AH}$ را روی دایره مساوی با کمان $\widehat{BC}$ و پاره خط AZ را روی AE مساوی با AH جدا می کنیم. داریم: $\widehat{DH}=\widehat{DB}$ (زیرا از دو کمان متساوی AD و DC دو کمان‌متساوی را کم کرده‌ایم)

پس: $\widehat{HAD}=\widehat{DAZ}$ (زیـراهـردومحاطی و رو به روی کمانهای متساوی هستند)

بنا بر این دو مثلث DAZ و DAH متساویند (در حالت دو ضلع و زاویهٔ بین آنها)

پس HD = ZD از طرف دیگر BD = DZ (زیرا هر دو با DH مساویند)

بنا بر این مثلث BDZ متساوی‌الساقین است و ارتفاع DE منصف قاعدهٔ BZ است.

بنا بر این:

$$AZ + ZE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم (۴).

یادداشتهای مربوط به برهان دوم قضیهٔ اول:

(۱) - عل: ص ۲ و ۳ - سوتر A: ص ۱۳ - چد: ص ۸ - چم: ص ۴۰.

(۲)- یک برهان دیگر از ابوسعید جرجانی به عنوان برهان ششم خواهد آمد.

(۳)- ابوسعید جرجانی ریاضیدانی ایرانی بوده که از وی اطلاع چندانی در دست نداریم.

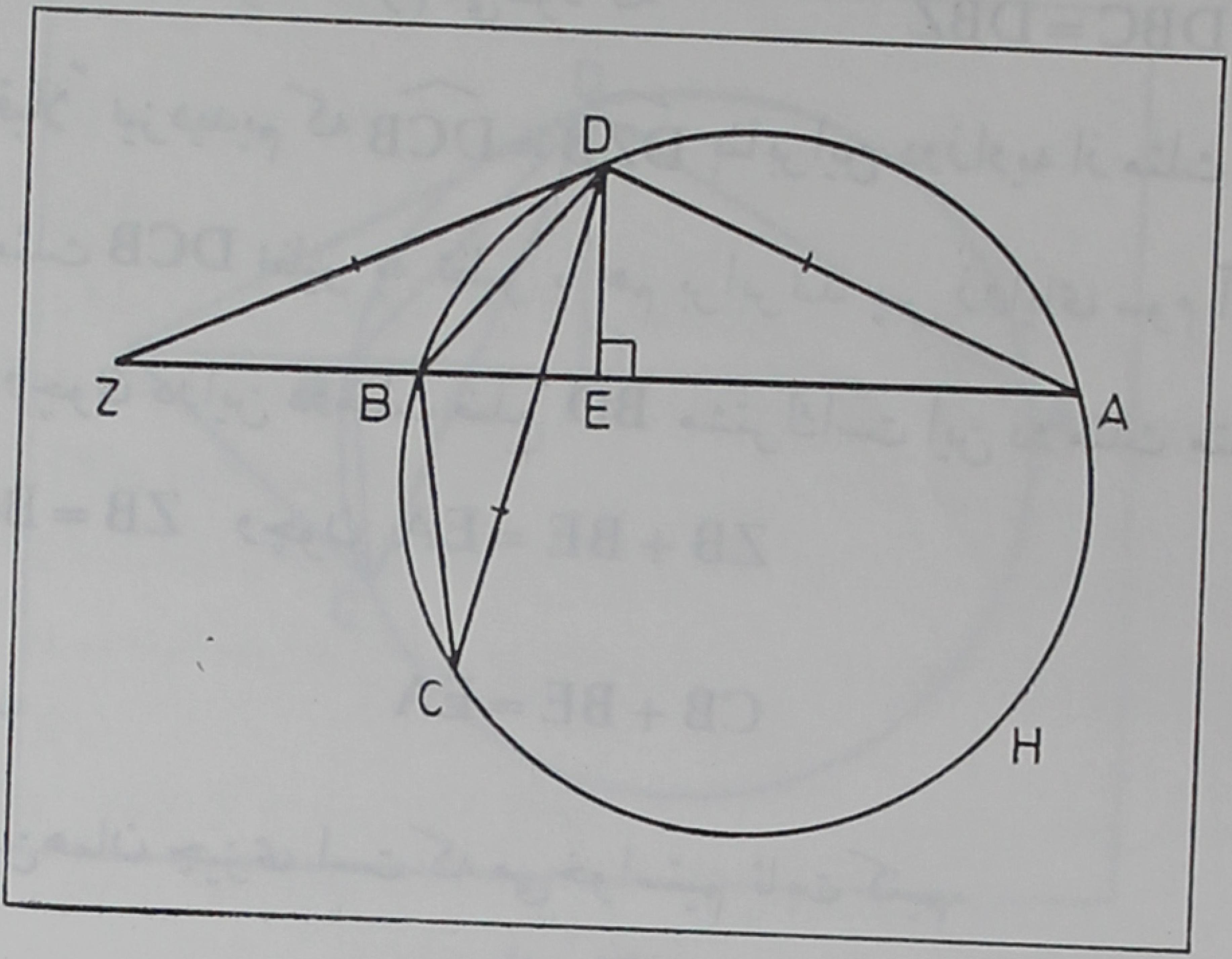
شاید برهانهائی که استاد از وی نقل کرده است از کتاب «مسایل هندسیة» وی استخراج شده باشد (رجوع کنید به کتاب «ریاضیدانان ایرانی» صفحات ۴۱ و ۴۲).

(۴)- در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» در پایان این برهان آمده است: «واتفق لی مثل هذا بعینه فی کتابی فی تصحیح القول بین العرض و الطول»

برهان سوم قضیهٔ اول (۱)- دومین برهان (۲) از ارشمیدس در کتاب دوایر (۳).

AB را امتداد داده روی آن EZ را مساوی با EA جدا می‌کنیم و پاره‌خطهای DA و DC و DB و DZ را رسم می‌کنیم. داریم:

AD = DC (زیرا D وسط کمان ABC است)



(شکل۹)

$AD = DZ$ (زیرا DE عمودمنصف پاره‌خط AZ است)

پس $DZ = DC = AD$. ازطرف دیگر دوزاویهٔ C و A محاطی وروبه‌روی یك کمان هستند پس $\widehat{DAB} = \widehat{DZB} = \widehat{DCB}$

وچون کمان $\widehat{DA}$ با کمان $\widehat{DC}$ مساوی‌است اگر کمان $\widehat{CHA}$ را بر هریك ازآنها بیفزاییم کمانهای متساوی $\widehat{DAHC}$ و $\widehat{DCHA}$ حاصل می‌شوند، امازاویهٔ DBC رو به روی کمان $\widehat{DAHC}$ و زوایای DAB و ADB مجموعاً رو به روی کمان $\widehat{DCHA}$ می‌باشند (زاویهٔ DAB رو به روی کمان $\widehat{DB}$ و زاویهٔ ADB رو به‌روی کمان BCA است) پس معلوم می‌شود که :

$$\overline{\widehat{DBC}} = \widehat{DAB} + \widehat{ADB}$$

ازطرف دیگرزاویهٔ DBZ زاویهٔ‌خارجی‌مثلث ADB است‌پس:

$$\widehat{DBZ} = \widehat{DAB} + \widehat{ADB}$$

ازدوتساوی فوق معلوم می‌شود که $\widehat{DBC} = \widehat{DBZ}$

وقبلاً نیزدیدیم که $\widehat{DZB} = \widehat{DCB}$ بنابراین دوزاویه از مثلث DZB با دو زاویه ازمثلث DCB نظیر به نظیر با هم برابرند پس زوایای سوم آنهانیز با هم مساویند وچون دراین دومثلث ضلع BD مشترک است این دو مثلث متساویند و در نتیجه $ZB = BC$ وچون $ZB + BE = EA$

پس $CB + BE = EA$

واین‌همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

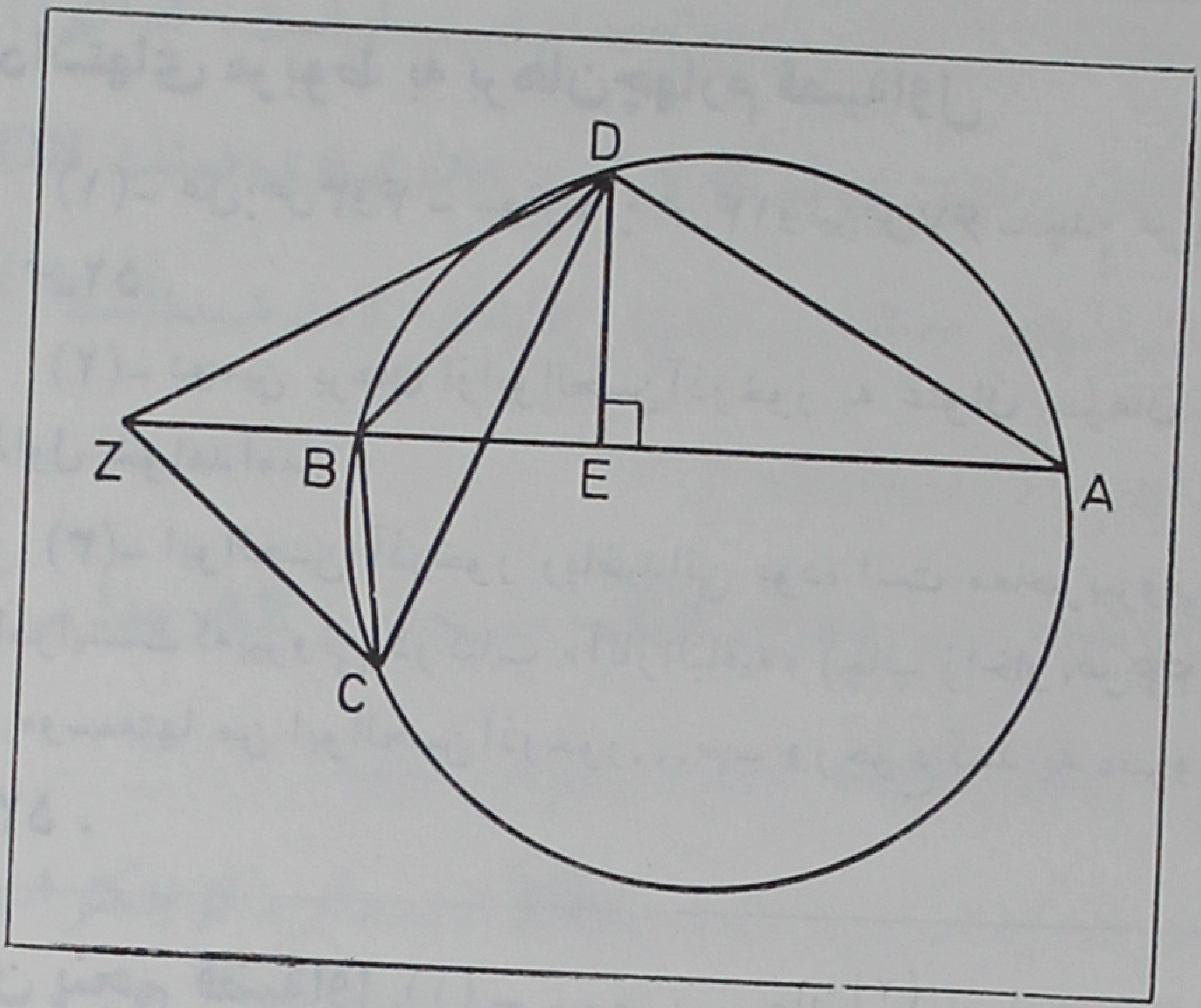
یادداشتهای مربوط به برهان سوم قضیهٔ اول :

(۱)- عل : ص۳ - سوترA : ص۱۳ - چد : ص۱۸ - چم:ص۵۱.

(۲)- نخستین برهان ارشمیدس به عنوان برهان‌اول قضیهٔ‌اول گذشت وسومین برهان او بعنوان برهان‌پنجم خواهدآمد.

(۳)- درچاپهای حیدرآباد و مصر ازکتاب «استخراج‌الاوتار» این برهان پانزدهمین برهان قضیهٔ‌اول‌است. ودرآنجا درآغازاین برهان‌آمده‌است. «ومنهم من صحح ذلک‌فی‌الجانب‌الاخر کارشمیدس‌فی‌کتاب‌الدوائرو سارینوس فی‌الاصول‌الهندسیه ببرهان غیرالذی حکیناه عنه وهو... » - دربارهٔ«کتاب الدوائر» و نام سارینوس رجوع کنید به یادداشتهای شمارهٔ۲و۳ ذیل برهان اول ازقضیهٔ‌اول.

برهان‌چهارم قضیهٔ‌اول(۱) - نخستین برهان(۲) از آذرخور ابن استاد جشنس(۳) - این‌برهان با اندک اختلاف شبیه برهان قبل‌است.



(شکل ۱۰)

AB را امتداد داده EZ را مساوی با AE جدا می‌کنیم و پاره‌خطهای DA و DB و DC و DZ و ZC را رسم می‌کنیم. چون DE عمودمنصف پاره‌خط AZ است $DA = DZ$ و چون نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$ است $DA = DC$ بنا براین $\widehat{DAB} = \widehat{DZB}$ و $\widehat{DCB} = \widehat{DAB}$ (زیرا هر دو محاطی و رو به روی یك کمان هستند) پس $\widehat{DZB} = \widehat{DCB}$.

حال گوییم چون مثلث DZC متساوی‌الساقین است $\widehat{DZC} = \widehat{DCZ}$ واگر ازاین دوزاویهٔ متساوی دوزاویهٔ متساوی DCB و DZB را کم کنیم می‌ماند :

$$\widehat{BCZ} = \widehat{BZC}$$

پس مثلث BZC متساوی‌الساقین است و $BZ = BC$ و چون $ZB + BE = EA$ بنا براین $BC + BE = AE$.

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم .

یادداشتهای مربوط به برهان چهارم قضیهٔ اول

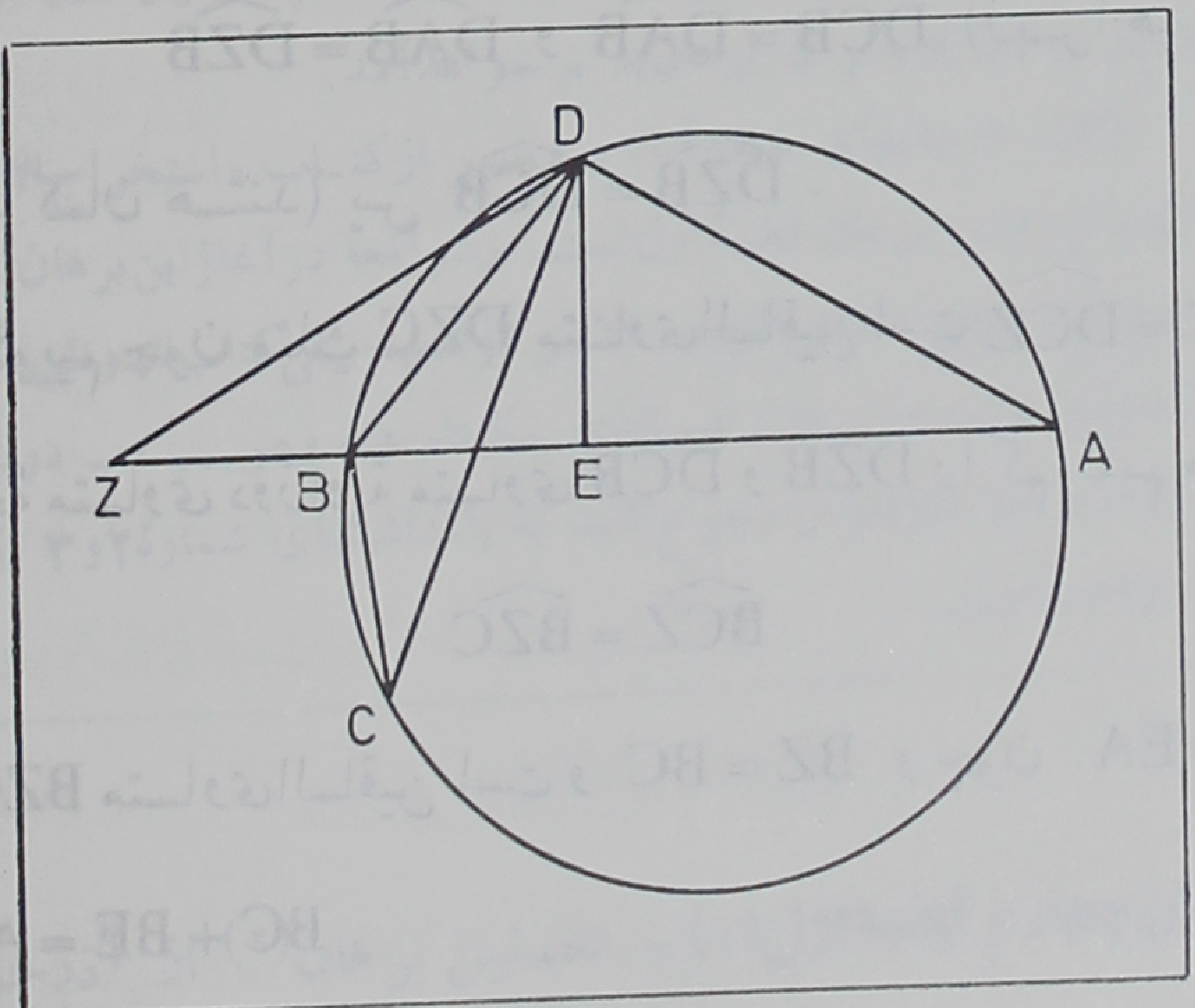
(۱)- عل: ص۳و۴ - سوتر A: ص۱۴ونیزص۶۷ - چد: ص۱۹و۲۰- چم: ص۵۲ .

(۲)- دومین برهان ازابوالحسن آذرخور به عنوان برهان چهاردهم قضیهٔ اول خواهدآمد.

(۳)- ابوالحسن آذرخور ریاضیدانی بوده است معاصربیرونی ودلیل این امراینست که بیرونی درکتاب «آثارالباقیه» (چاپ زاخاو،ص۴۴) نوشته است «وسمعتها من ابوالحسن آذرخور...» - ورجوع کنید به «بیرونی نامه» ص۵۲۱ .

برهان پنجم قضیهٔ اول(۱) - سومین برهان(۲) از ارشمیدس در «کتاب الدوائر»(۳).

استادنوشته است(۴) که این برهان را در کتاب «مسائل» ازیونانیان دیده و احتمال داده است که شاید آن کتاب ازآپولونیوس باشد که یوحنابن یوسف(۵) آن را ازیونانی به عربی ترجمه کرده است.



(شکل ۱۱)

[این برهان اصولاً مانند برهان دوم ارشمیدس است، که آن را به عنوان برهان سوم قضیهٔ اول نوشتم، جز اینکه در این برهان تساوی دو مثلث ZDB و CDB با استفاده از قضیهٔ هفتم مقالهٔ ششم «اصول اقلیدس» ثابت شده است(۶) بدون آنکه مستقیماً به آن قضیه اشاره شده باشد.]

AB را امتداد داده روی آن EZ را مساوی با AE جدا می کنیم و پاره‌خطهای DA و DC و DB و DZ را رسم می کنیم.

DC وتری است از دایره و کمان $\widehat{DBC}$ از نیمدایره کوچکتر است. این کمان نمی تواند از نیمدایره بزرگتر باشد زیرا کمان $\widehat{AD}$ با آن مساوی است و ممکن نیست دو کمان متساوی از دایره جدا کنیم که هریک از نیمدایره بزرگتر باشد مگر درصورتی که قسمتی از آنها مشترک باشد. بنابراین زاویهٔ DBC که محاط در کمان $\widehat{DBC}$ است منفرجه می باشد(۷). از طرف دیگر AD وتری از دایره است و کمان $\widehat{DCA}$ بزرگتر از نیمدایره است و زاویهٔ DBA که در این کمان محاط است (روبه‌روی کمان AD است) حاده است، پس زاویهٔ DBZ (که مکمل آن است) منفرجه است. از طرف دیگر

$\widehat{DZB}=\widehat{DCB}$ (زیرا هردو مساوی با زاویهٔ A هستند)

و $DC=DZ$ (زیرا هردو مساوی با DA هستند)

بنابراین $\frac{DZ}{DB}=\frac{DC}{DB}$ پس در دو مثلث DBZ و DBC زاویهٔ C مساوی با زاویهٔ Z و اضلاع دو زاویهٔ دیگر (یعنی زوایای به رأس D) متناسب هستند و علاوه بر این

هریك ازدوزاویهٔ DBC و DBZ منفرجه می باشند. پس (بنا به قضیهٔ هفتم مقالهٔ ششم کتاب «اصول اقلیدس»[٦]) زوایای دیگرشان نظیر به نظیر متساوی است. پس دو مثلث متشابهند (وچون ضلع BD در آنها مشترك است) پس دو مثلث متساوی می باشند و در نتیجه $BZ = BC$

بنا براین : $BC + BE = AE$

واین همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان پنجم قضیهٔ اول

(۱)- عل : ص ۴- سوتر A : ص۱۴ ونیز ص۶۷- چد : ص:۲۰- چم : ص ۵۳.

(۲)- برهانهای اول ودوم ارشمیدس را به عنوان برهانهای اول و سوم قضیهٔ اول نوشتم.

(۳)- دربارهٔ «کتاب الدوائر» رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ ۳ ذیل برهان اول قضیهٔ اول.

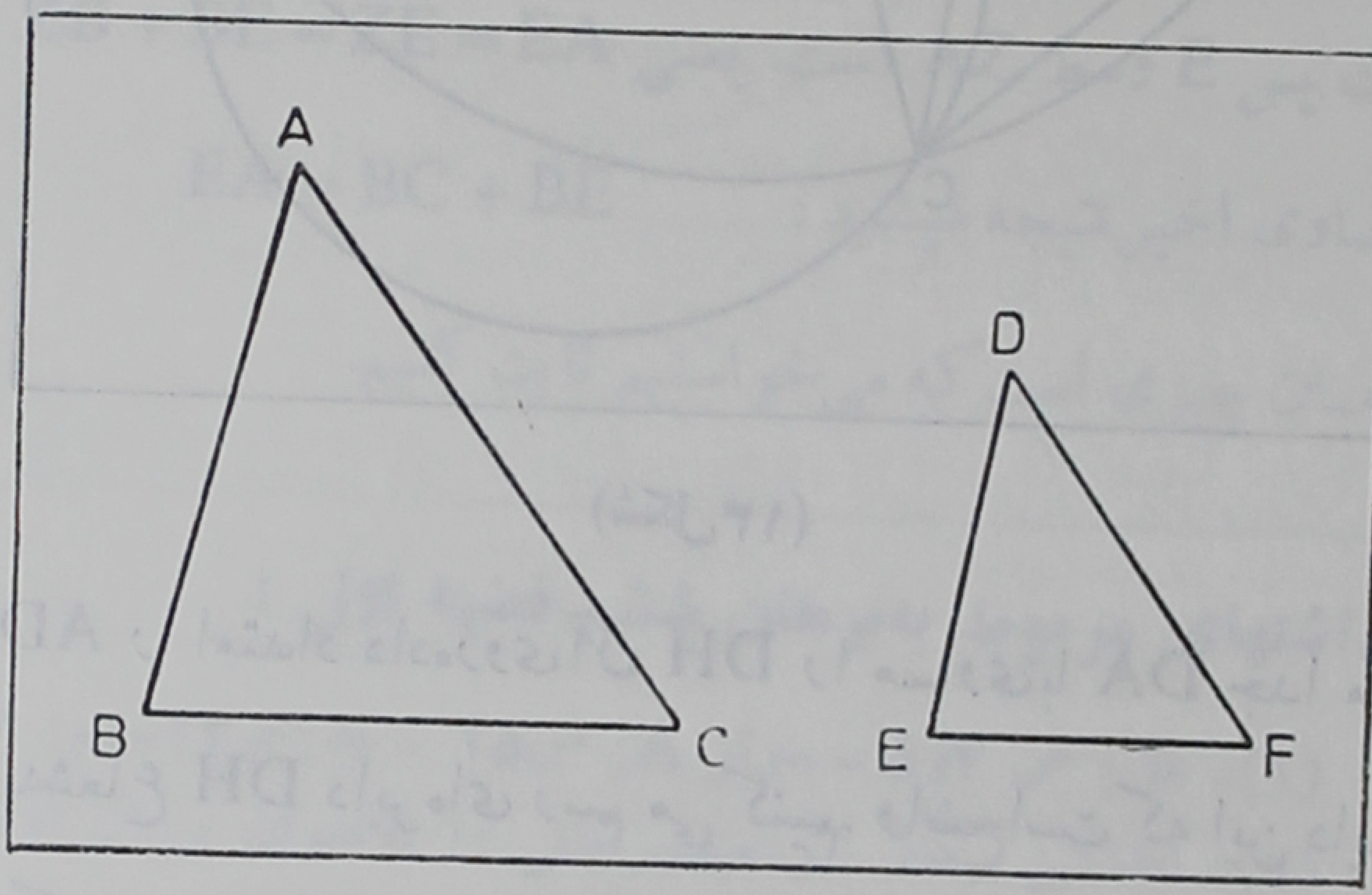
(۴)- عین عبارت عربی درنسخهٔ «عل» چنین است : « و وجد بعینه فی مسائل للیونیین لائقة ان تکون لابلونیوس ترجمة یوحنابن یوسف» .

(۵)- یوحنابن یوسف بن الحارث بن البطریق القس ، متوفی به سال ۳۷۰ هجری قمری است. ازوی «مقالةفی المقادیر المنطقة والصم» به شمارهٔ ۲۴۵۷/۷۸ در کتابخانهٔ ملی پاریس موجود است (رجوع کنید به سوتر M : ص ۶۰ ش ۱۳۱- ترجمهٔ فارسی الفهرست : ص ۵۰۵ - بروکلمان S_1 : ص ۳۸۹)- استاد دربرهان اول قضیهٔ دوم (خواهدآمد) نیز به این ترجمهٔ یوحنا بن یوسف اشاره کرده است.

(۶)- ترجمهٔ فارسی قضیهٔ هفتم ازمقالهٔششم اصول اقلیدس، این است (رجوع کنید به: هیث E ، ج ۲ص ۲۰۶):

هرگاه دردو مثلث یک‌زاویه ازاولی بایک زاویه ازدومی مساوی باشد واضلاع یک‌زاویهٔ دیگر ازاولی با اضلاع یک زاویهٔ دیگر ازدومی متناسب باشند وعلاوه براین زوایای سوم آنها یاهردوحاده ویا هردو منفرجه باشند زوایای آن دو مثلث نظیربه نظیر باهم مساوی‌خواهند بود (یعنی آن دو مثلث متشابه خواهندبود)

چون بیان این‌قضیه به‌اندازهٔ کافی‌رسا نیست فرض‌قضیه را در هردو حالت می‌نویسم:



(شکل۱۲)

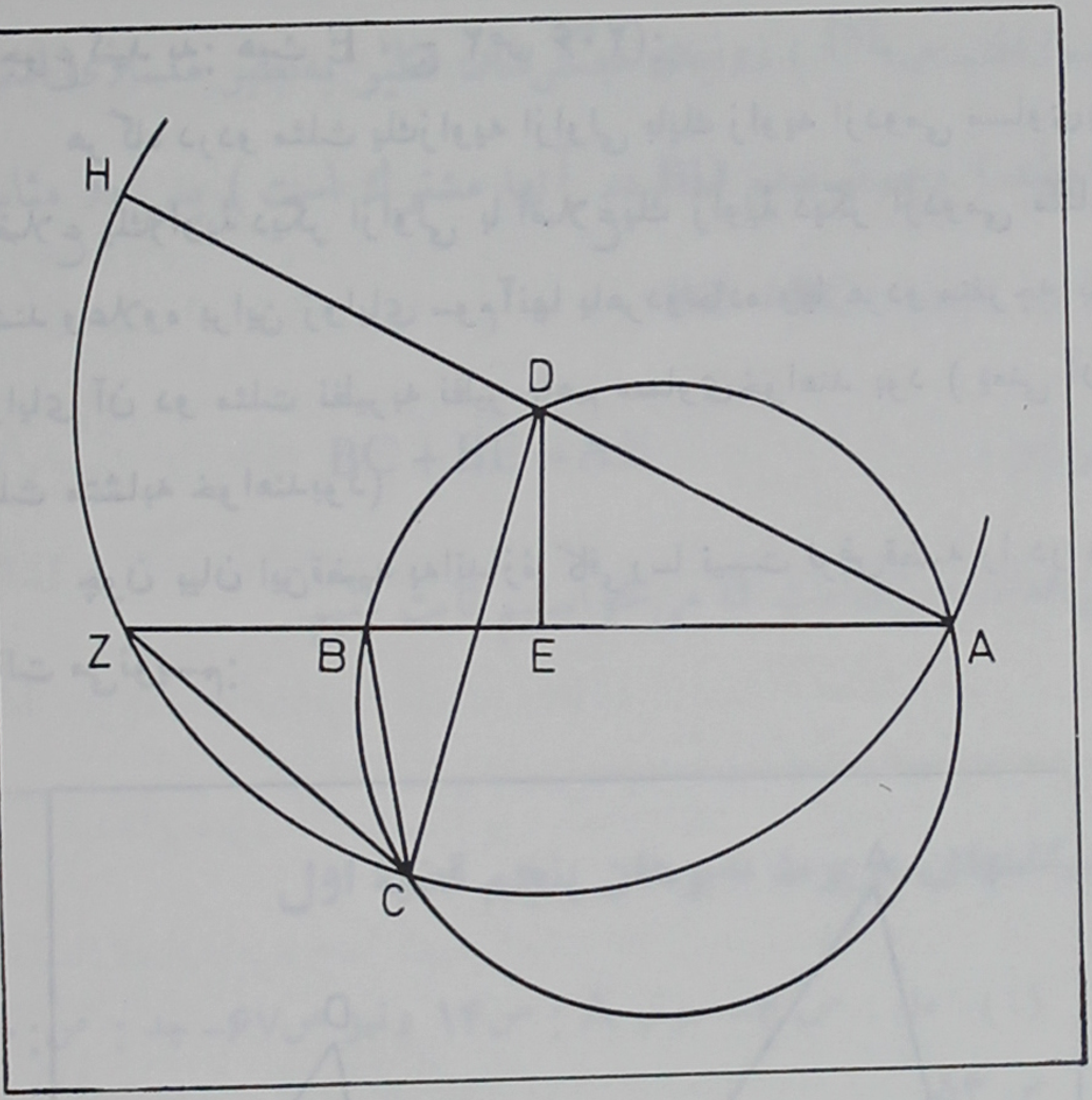
فرض حالت‌اول: $\hat{A}=\hat{D}$ و $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ و $C<۹۰°$ و $F<۹۰°$

فرض حالت‌دوم: $\hat{A}=\hat{D}$ و $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ و $C\geqslant ۹۰°$ و $F\geqslant ۹۰°$

(برای بحث‌آموزنده‌ای دربارهٔ این‌قضیه رجوع کنید به«هیث E» ج ۲ ص ۲۰۸ و۲۰۹).

(۷)- برای برهان‌ساده‌تری‌ازاین‌مطلب رجوع کنید به‌تبصرهٔ‌صفحهٔ۶۶

برهان ششم قضیهٔ اول[۱] ـ دومین برهان[۲] از ابوسعید ضریر جرجانی[۳].



(شکل۱۳)

وتر AD را امتداد داده روی آن DH را مساوی با DA جدا می کنیم و به مرکز D و به شعاع DH دایره‌ای رسم می کنیم. واضح است که این دایـره از نقاط A و C می گذرد و ADH قطر آن است. سپس AB را امتداد می‌دهیم تا این دایره را در نقطهٔ Z قطع کند و ZC و DC را رسم می کنیم. داریم :

$\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ (زیرا هر دو محاطی و روبه‌روی یك کمان هستند)

$\widehat{ADC} = ۲\widehat{AZC}$ (زیرا یکی مرکزی و دیگری محاطی است و رو به روی یك کمان هستند)

پس $\widehat{ABC} = ۲\widehat{AZC}$

اما $\widehat{ABC}=\widehat{AZC}+\widehat{ZCB}$ (زاویهٔ خارجی مثلث ZBC در رأس B)
ازدو تساوی اخیر با درنظر گرفتن اینکه $\widehat{AZC}$ همان $\widehat{BZC}$ است نتیجه
می‌شود:

$$\widehat{BZC}=\widehat{ZCB}$$

یعنی مثلث BZC متساوی‌الساقین است[۴] و $ZB=BC$

بنابراین $ZB+BE=BC+BE$

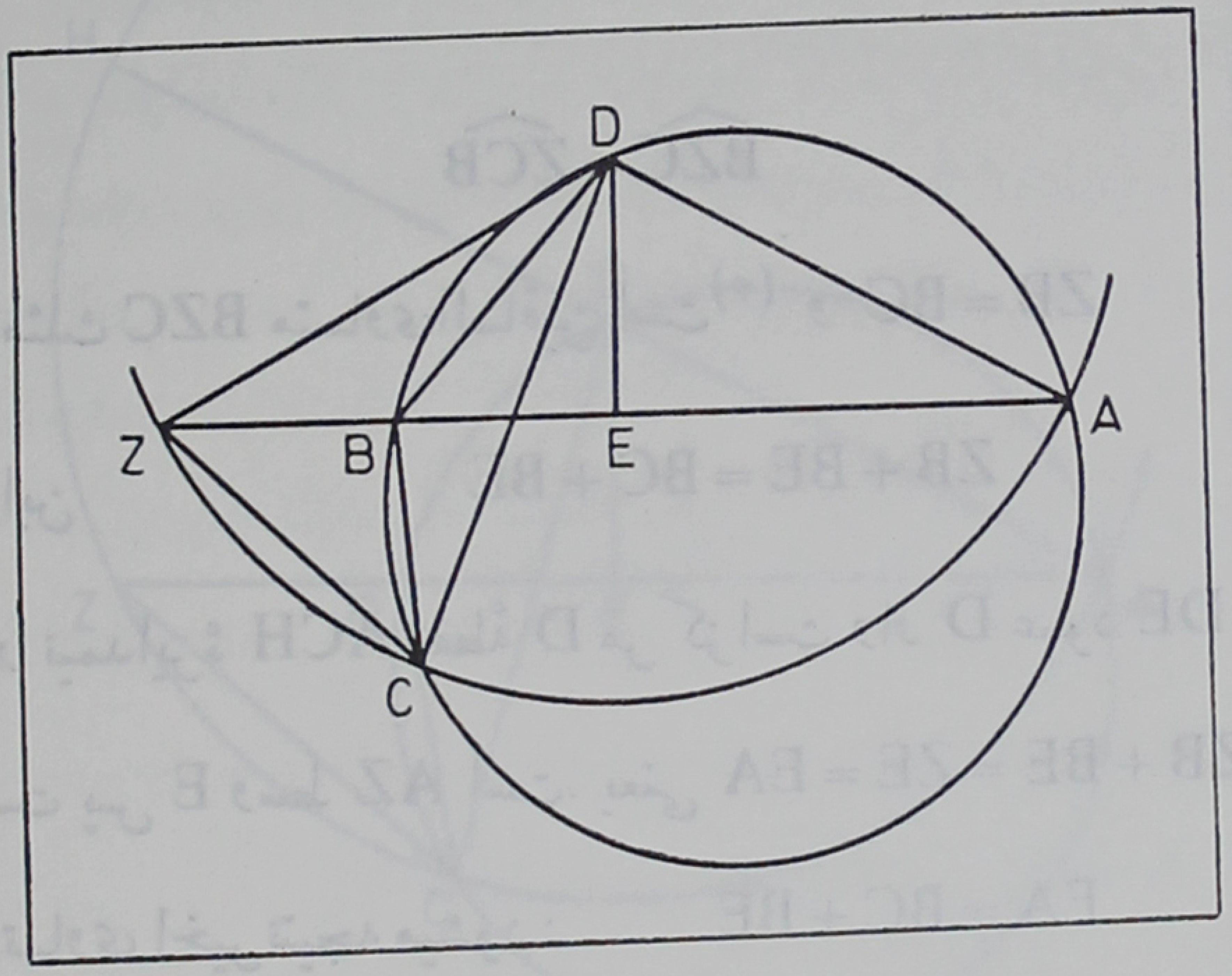
اما در نیمدایرهٔ ACH نقطهٔ D مرکز است واز D عمود DE بروتر AZ
فرود آمده‌است پس E وسط AZ است. یعنی $ZB+BE=ZE=EA$
ازدو تساوی اخیر نتیجه میشود: $EA=BC+BE$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به‌برهان ششم قضیهٔ اول:

(۱)- عل: ص ۴و۵ - سوتر A: ص۱۵ - چد:ص۲۳-چم: ص۵۷
(۲)- نخستین برهان ابوسعیدجرجانی را به‌عنوان برهان دوم‌قضیهٔ اول نوشتیم.
(۳)- دربارهٔ ابوسعیدجرجانی رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان‌دوم قضیهٔ‌اول.
(۴)- ابوسعیدجرجانی درضمن برهان این‌قضیه پس‌ازآنکه متساوی‌-الساقین بودن مثلث BZC را به‌ثبوت رسانیده اضافه‌کرده‌است‌که این حکم دربارهٔ هرخط قاطعی‌که ازنقطهٔ A خارج‌شود ودودایرهٔ مرسوم را قطع‌کند درست است. یعنی‌اگرخط دیگری مانند AB' رسم‌کنیم‌که دایرهٔ‌اولی را در نقطهٔ B' ودایرهٔ دومی را درنقطهٔ Z' قطع‌کند و B' را به C وصل‌کنیم بازهم مثلث $Z'B'C$ متساوی‌الساقین‌خواهدبود. واین واضح است.

برهان هفتم قضیهٔ اول(۱)**-** نخستین برهان(۲) از ابوسعید احمد بن محمد بن عبدالجلیل سجزی(۳).



(شکل۱۴)

وتر AB را امتداد داده روی آن BZ را مساوی با BC جدا می کنیم و DZ و ZC و DC را رسم می کنیم. داریم :

$\widehat{BCZ} = \widehat{BZC}$ (زیرا مثلث BCZ متساوی‌الساقین است)

پس $\widehat{ABC} = 2\widehat{BCZ} = 2\widehat{BZC}$ (زاویهٔ خارجی مثلث BCZ در رأس B)

وچون $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ (زیرا هردو محاطی و روبه روی یك کمان هستند)

پس $\widehat{ADC} = 2\widehat{BZC}$. بنابراین دایره‌ای که به مرکز D و به شعاع DA رسم شود از نقاط C و Z می گذرد. زیرا (AD = DC) وزاویهٔ ADC در این دایره زاویه‌ای مرکزی است و زاویهٔ BZC یعنی AZC نصف آن است. پس :

$$AD = DZ$$

بنا بر این دومثلث قائم‌الزاویهٔ ADE و ZDE متساویند[۴] پس $AE = EZ$

و چون $ZE = ZB + BE = BC + BE$ پس $AE = BC + BE$

واین همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان‌هفتم قضیهٔ‌اول :

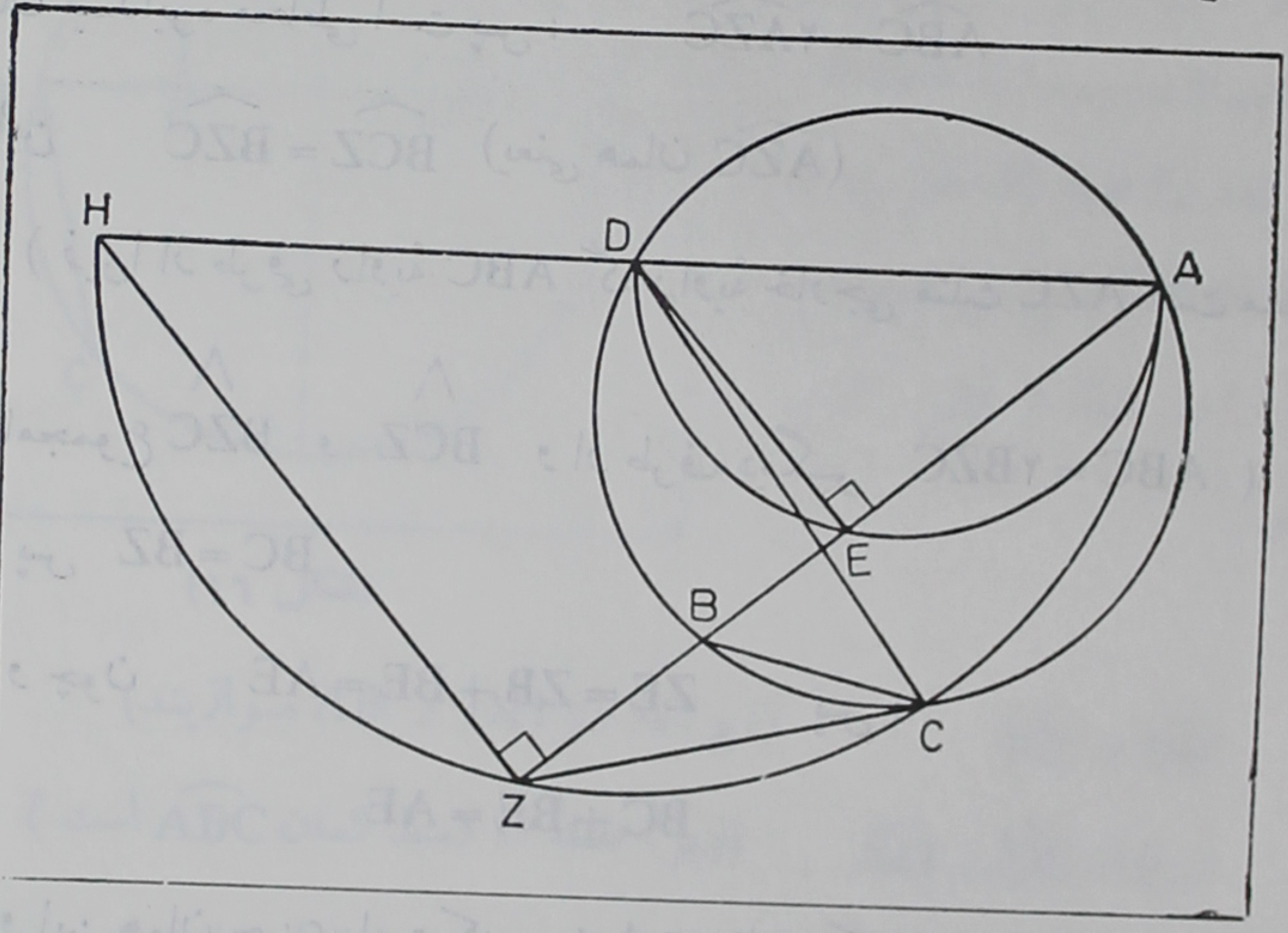
(۱)- عل: ص۵و۶ - سوترA: ص۱۶ - چد: ص۲۲-چم: ص۵۶.

(۲)- دوبرهان دیگر ازابوسعیدسجزی به‌عنوان برهان‌هشتم وبرهان نهم قضیهٔ‌اول خواهدآمد. - ونیز رجوع کنید به برهانهای اول و چهارم قضیهٔ‌دوم.

(۳)- دربارهٔ ابوسعید سجزی رجوع کنید به «بیرونی‌نامه» ص۵۲۷- و یا به «قربانی - ریاضیدانان» صفحات ۲۵۰ تا ۲۶۸.

(۴)- می‌توان گفت که چون مثلث DZA متساوی الساقین است ارتفاع نظیرقاعدهٔ‌آن یعنی DE قاعدهٔ AZ رانصف‌می‌کندپس $AE = ZE$

برهان‌هشتم قضیهٔ‌اول(۱) - دومین برهان(۲) ازابوسعیدسجزی(۳).



(شکل۱۵)

به قطر AD نیمدایرهٔ AED را رسم می کنیم و AD را امتداد می‌دهیم و روی‌آن DH را مساوی با DA جدا می کنیم و به قطر AH نیمدایرهٔ ACH را رسم می کنیم و AB را امتداد می‌دهیم تا نیمدایرهٔ اخیر را در نقطهٔ Z قطع کند و ZH و ZC را رسم می کنیم.

(چون دودایرهٔ ACH و AED در نقطهٔ A متماس هستند)(۴) داریم :

$$\frac{AD}{DH} = \frac{AE}{EZ}$$

زیرا دوزاویهٔ AED و AZH قائمه‌اند و دومثلث AED و AZH متشابهند. وچون AD با DH مساوی‌است پس $AE = EZ$

ازطرف دیگر دوزاویهٔ محاطی ADC و ABC که محاطی وروبه‌روی یك کمان هستند متساویند. وزاویهٔ ADC در نیمدایرهٔ ACH مرکزی‌وزاویهٔ AZC درهمان نیمدایره محاطی است پس : $\widehat{ABC} = ۲\widehat{AZC}$

بنابراین $\widehat{BCZ} = \widehat{BZC}$ (یعنی همان $\widehat{AZC}$)

(زیرا از طرفی زاویهٔ ABC که زاویهٔ خارجی مثلث AZC است مساوی است با مجموع $\hat{BZC}$ و $\hat{BCZ}$ و از طرف دیگر $ABC = ۲BZC$)

پس $BC = BZ$

و چون $ZE = ZB + BE = AE$ پس :

$$BC + BE = AE$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان هشتم قضیهٔ اول :

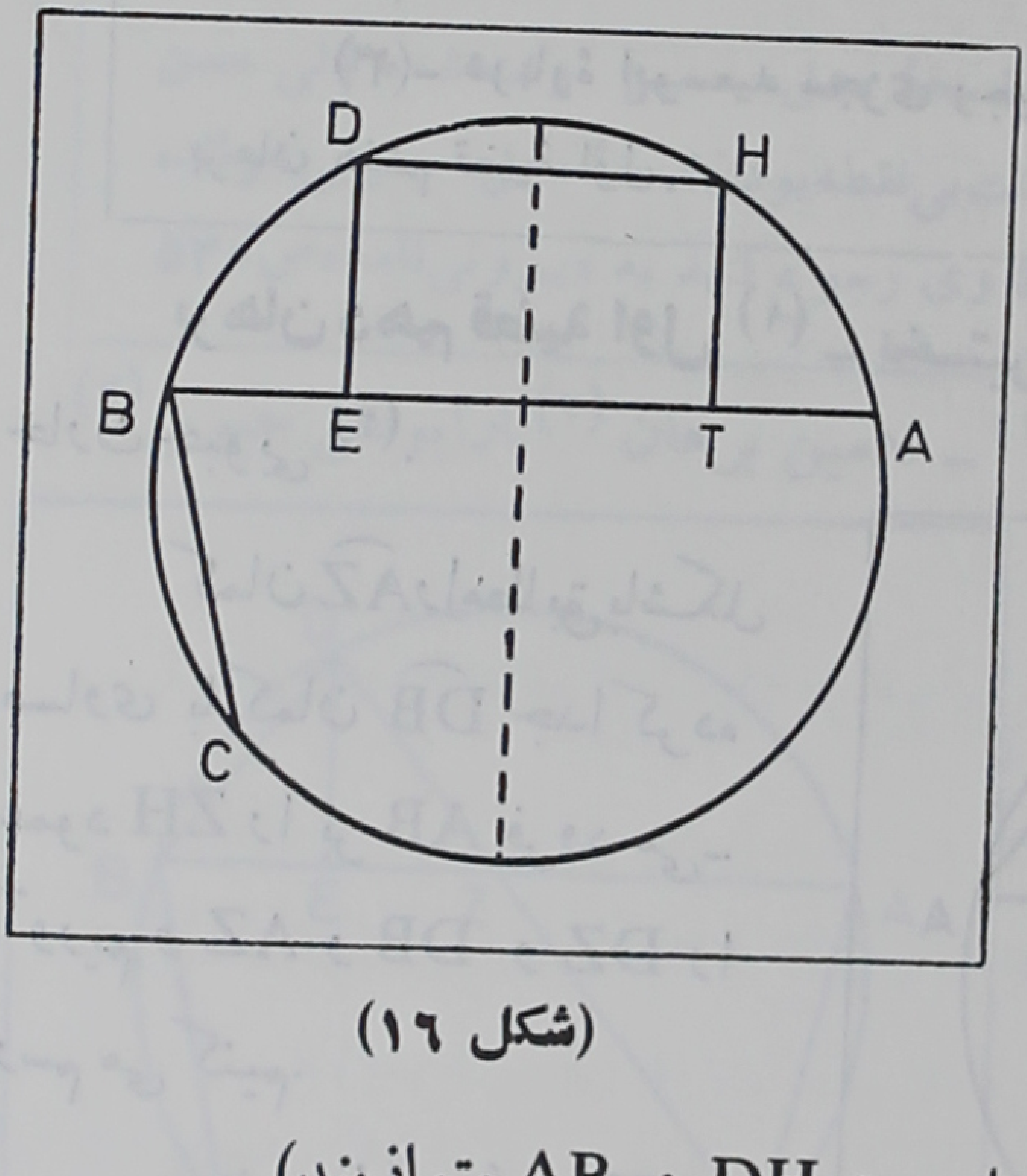
۱ـ عل: ص ۵و۶ ـ سوتر A: ص ۱۶ـ چد : ص۲۴ـ چم: ص ۵۹

۲ـ یك برهان دیگر ازابوسعید سجزی به عنوان برهان هفتم قضیهٔ اول گذشت ویك برهان دیگر نیزازاو به عنوان برهان نهم قضیهٔ اول خواهد آمد. ونیز رجوع کنید به برهانهای اول وچهارم قضیهٔ دوم.

۳ـ دربارهٔ ابوسعید سجزی رجوع کنید به یاد داشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان هفتم قضیهٔ اول.

۴ـ اینکه دودائرهٔ ACH و AED درنقطهٔ A متماس هستند صحیح است ولی یادآوری آن دربرهان قضیه ضروری نیست.

برهان نهم قضیهٔ اول (۱) ـ سومین برهان(۲) از ابوسعید سجزی (۳)



(شکل ۱۶)

از نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$ خطی به‌موازات AB رسم می کنیم تا دایره را در نقطهٔ H قطع کند وازنقطهٔ H خطی به ـ موازات DE رسم می کنیم تا AB را در نقطهٔ T قطع کند.

داریم :

$\widehat{BD} = \widehat{AH}$ (زیرا دو وتر DH و AB متوازیند)

و چون $\widehat{AD} = \widehat{DC}$ (زیرا نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$ است)

پس $\widehat{DH} = \widehat{BC}$ (نتیجهٔ کم کردن تساوی اول ازتساوی دوم عضو به‌عضو)

و بنا براین $DH = ET = BC$ (زیرا شکل DHTE مستطیل است)
ازطرف دیگر واضح است که $AT = BE$ (زیرا هر دو نسبت به قطری ازدایره که عمود بر AB رسم شود قرینهٔ یکدیگرند). بنا براین :

$$AT + TE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

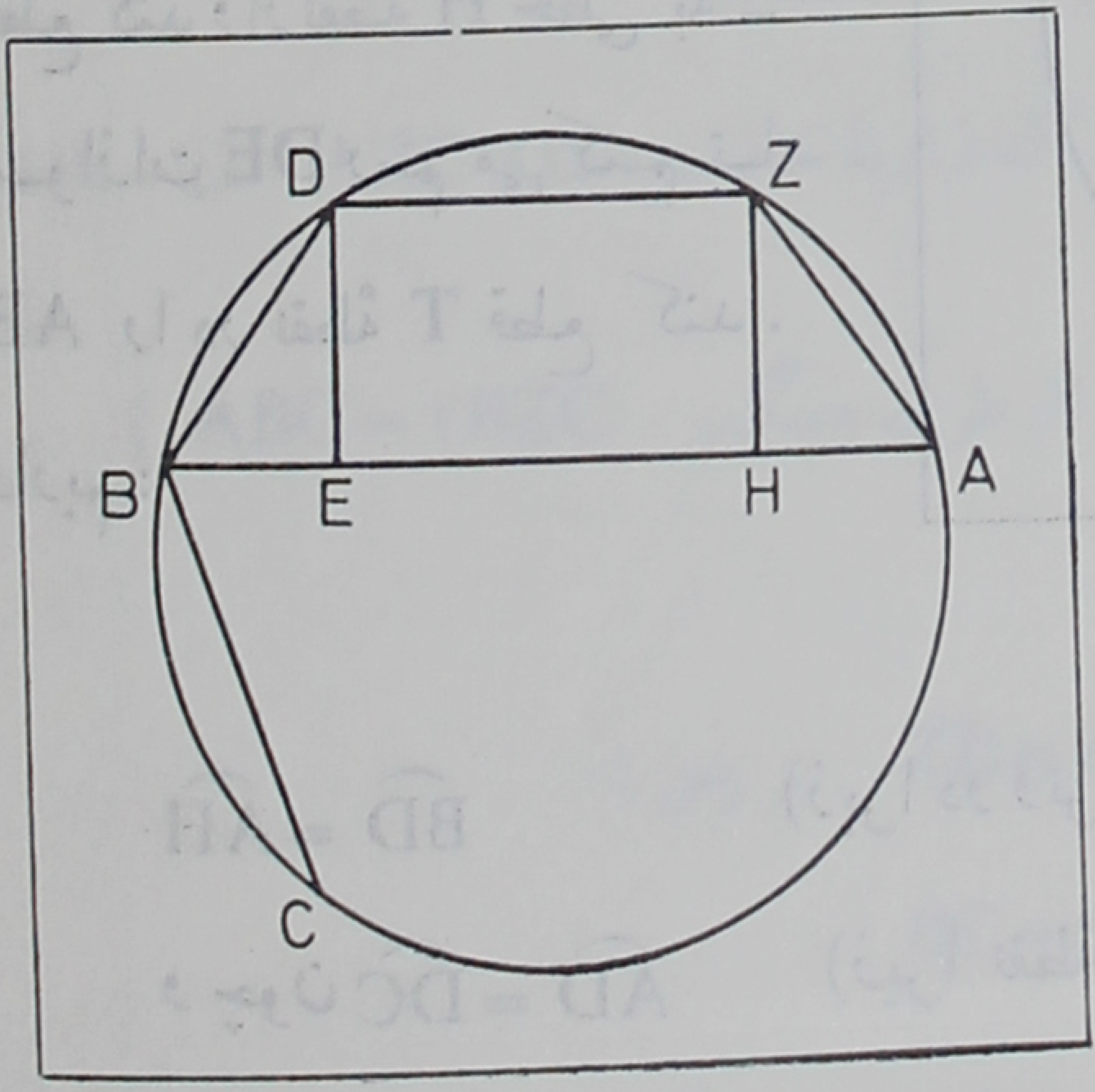
یادداشتهای مربوط به برهان نهم قضیهٔ اول :

(۱)- عل: ص ۶ - سوتر A : ص ۱۷ - چد: ص۹ و ۱۰- چم : ص ۴۰ و ۴۱

(۲)- دوبرهان دیگر برای قضیهٔ اول از ابوسعید سجزی به عنوان برهانهای هفتم وهشتم گذشت - ونیزرجوع کنید به برهانهای اول وچهارم قضیهٔ دوم.

(۳)- دربارهٔ ابوسعید سجزی رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ(۳) ذیل برهان هفتم قضیهٔ اول.

برهان دهم قضیهٔ اول (۱) - نخستین برهان (۲) از قاضی ابوعلی حسن بن حارث حبوبی (۳).



(شکل۱۷)

کمان $\widehat{AZ}$ را مطابق باشکل مساوی با کمان $\widehat{DB}$ جدا کرده عمود ZH را بر AB فرود می‌آوریم و AZ و DB و DZ را رسم می کنیم.

چون دو زاویهٔ ZHA و DEB قائمه‌اند ودوزاویهٔ ZAB و DBA متساویند (زیرا هر دو

محاطی ورو به‌رو به‌دو کمان متساوی $\widehat{ZDB}$ و $\widehat{DZA}$ هستند پس دومثلث قائم الزاویهٔ AZH و BDE متساوی می باشند. پس $ZH = DE$ و چون این دوپاره خط علاوه برمتساوی بودن متوازی هم‌هستند پس $EH = ZD$ (زیرا شکل DZHE مستطیل است) از طرف دیگر $DZ = BC$ (زیرا کمانهای رو بـه‌روی آنها متساویند) بنا براین $EH = BC$ واز آنجا :

$$AH + HE = EB + BC$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به‌برهان دهم قضیهٔ اول :

(۱)- عل: ص۶- سوتر A : ص۱۷ چد: ص۱۲ - چم : ص۴۴

(۲)- یك‌برهان دیگرازابوعلی حبوبی به‌عنوان برهان‌یازدهم قضیهٔ اول خواهدآمد.

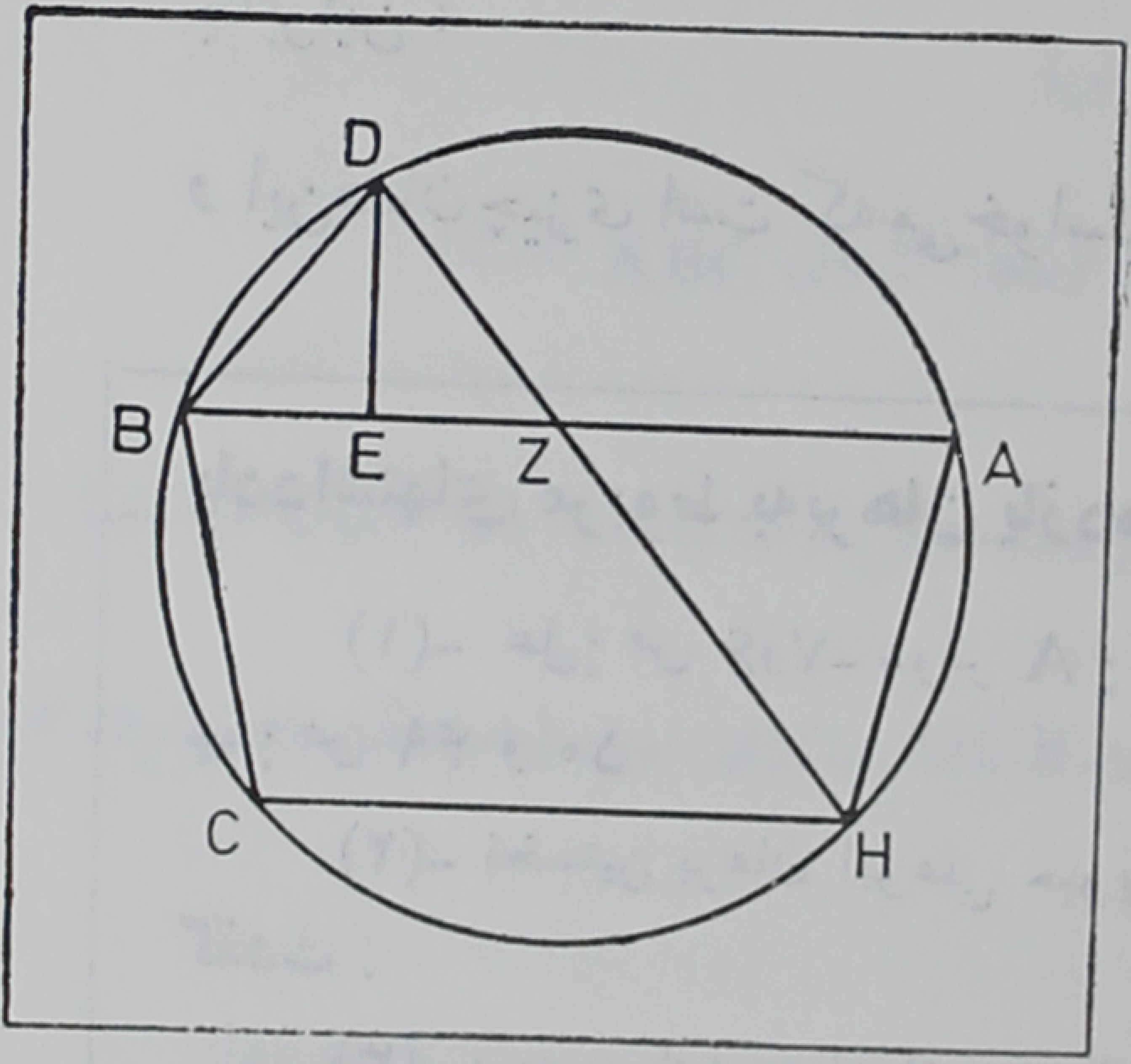
(۳)- نام‌ابوعلی حبوبی درنسخهٔ «عل» حسین نوشته‌شده ولی حسن صحیح است. سوتر لقب اورا به‌علت بی‌نقطه‌بودن‌نسخهٔ «عل» جنوبی‌خوانده ولی‌حبوبی‌صحیح است - در بارهٔ وی رجوع کنید به «بیرونی‌نامه»ص۵۳۰

برهان یازدهم قضیهٔ اول (۱) - دومین برهان (۲) ازابوعلی حبوبی (۳)

روی EA پاره‌خط EZرا مساوی‌با EB جدا کرده DZ را امتداد می‌دهیم تادایره را در نقطهٔ H قطع کند و پاره‌خطهایDB و AH و HC را رسم می کنیم. داریم .

$$\widehat{AZH} = \widehat{DZB}$$

(دو زاویهٔ متقابل به‌رأس)



(شکل۱۸)

$\widehat{AHZ} = \widehat{DBZ}$ (محاطی و روبه‌رو به یك کمان)

وچون $\widehat{DZB} = \widehat{DBZ}$ (زیرا DE عمودمنصف پاره خط BZ است)پس،

$\widehat{AHZ} = \widehat{AZH}$ یعنی $AH = AZ$

ازطرف دیگر $\widehat{AHD} = \widehat{DHC}$ (محاطی و روبه‌رو به‌دو کمان متساوی $\overset{\frown}{AD}$ و $\overset{\frown}{DC}$)

پس $\widehat{DHC} = \widehat{AZH}$ (دوچیزمتساوی بایك‌چیز). امااین‌دوزاویه‌نسبت به دو خط AB و CH و قاطع ZH متبادل داخلی هستند وچون متساویند پس CH با AB موازی‌است پس $\overset{\frown}{AH} = \overset{\frown}{BC}$

یعنی $AH = BC$ وچون دیدیم که $AH = AZ$ پس $AZ = BC$

بنابراین : $AZ + ZE = EB + BC$

و این‌همان‌چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به‌برهان یازدهم قضیهٔ اول :

(۱)- عل: ص ۶و۷- سوتر A : ص ۱۷ و ۱۸ - چد: ص ۱۷- چم: ص ۴۹ و ۵۰

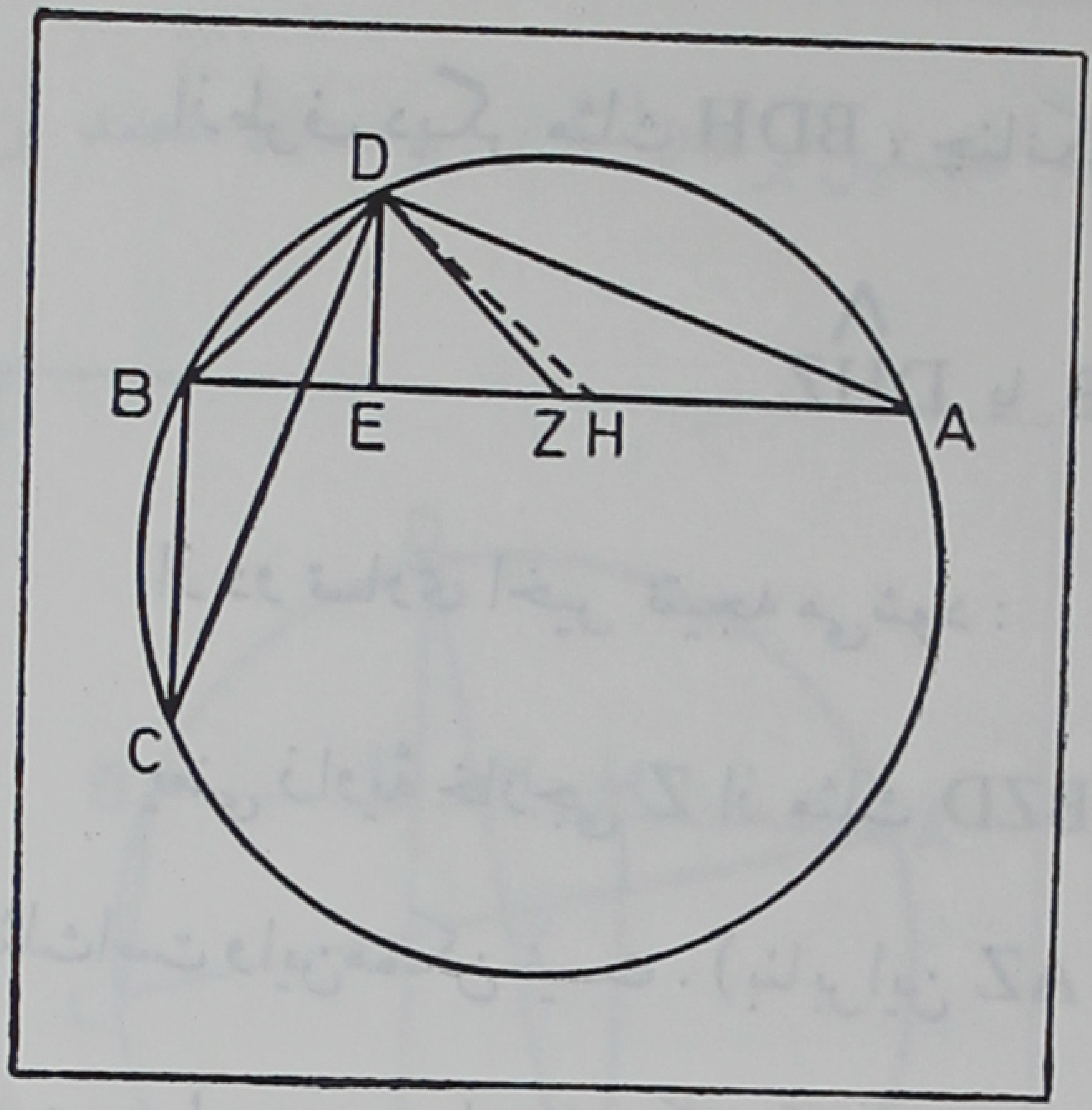
(۲)- نخستین برهان ابوعلی حبوبی به‌عنوان برهان دهم قضیهٔ‌اول گذشت .

(۳)- رجوع کنید به‌یادداشت شمارهٔ (۳) ذیل‌برهان دهم قضیهٔ اول

برهان دوازدهم قضیهٔ اول[۱] ـ نخستین برهان[۲] از ابونصر منصور بن ـ علی بن عراق[۳].

روی AE پاره خط EZ را مساوی با EB جدا کرده نقطهٔ D را به‌نقاط A و Z و B و C وصل می کنیم.

پاره خط AZ نه می‌تواند از BC بزرگتر باشد و نه کوچکتر. زیرا اگر مثلاً AZ از BC بزرگتر باشد و روی AZ پاره خط AH را مساوی با BC جدا کنیم (نقطهٔ H بین نقاط A و Z واقع خواهد شد) حاصل می‌شود:



(شکل ۱۹)

$AH = BC$ (بنا به‌فرض)

$AD = DC$ (زیرا D وسط کمان $\widehat{ABC}$ است)

$\hat{A} = \hat{C}$ (زیرا هر دو محاطی و روبه‌رو به یك کمان هستند)

بنا بر این مثلث DAH با مثلث DCB مساوی است (در حالت دو ضلع و زاویهٔ بین آنها) پس $DH = DB$

اما چون DE عمود منصف پاره‌خط BZ است پس $DZ = DB$ [۴]

از دوتساوی فوق نتیجه می‌شود $DH = DZ$ یعنی مثلث DZH متساوی ـ الساقین است و بنابراین

$$\widehat{DZH} = \widehat{DHZ}$$

ازطرف دیگر مثلث BDH ، چنانکه دیدیم ، نیزمتساوی‌الساقین است پس:

$$\widehat{DBH} = \widehat{DHB} \quad \text{یا} \quad \widehat{DHZ}$$

از دو تساوی اخیر نتیجه می‌شود :

$$\widehat{DZH} = \widehat{DBH}$$

یعنی زاویهٔ خارجی Z از مثلث BZD مساوی با زاویهٔ داخلی B از همان مثلث‌است واین‌ممکن نیست . (بنابراین AZ نمی‌تواند از BC بزرگتر باشد) به همین‌طریق می‌توان ثابت کرد که AZ نمی‌تواند از BC کوچکتر باشد. پس $AZ = BC$ وبنابراین :

$$AZ + ZE = EB + BC$$

واین‌همان‌چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان دوازدهم قضیهٔ‌اول :

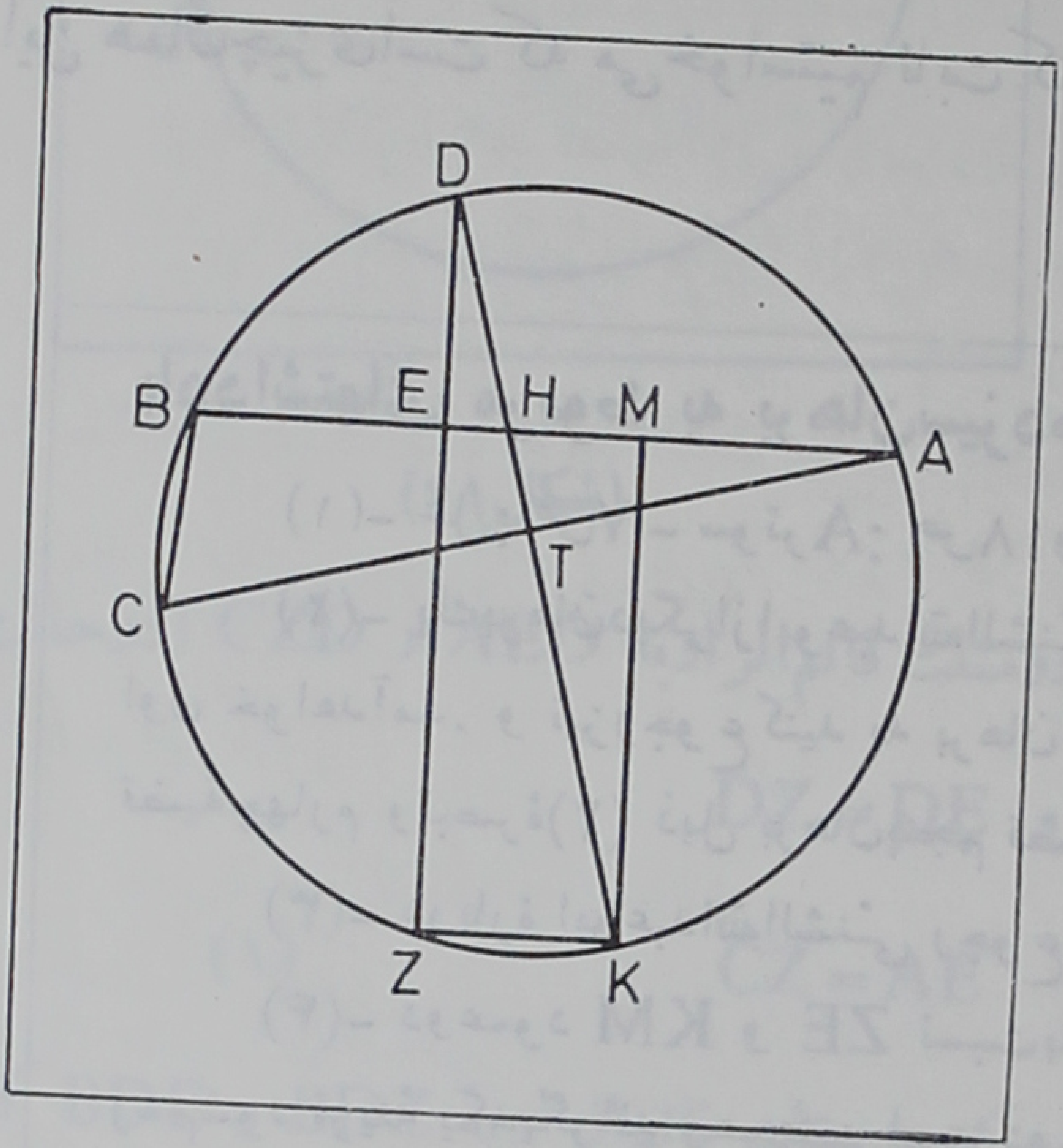
(۱)- عل : ص۷ - سوترA: ص۱۸ - چد: ص۱۳ - چم : ص۴۵.

(۲)- یک‌برهان دیگرازابونصرعراق به عنوان برهان شانزدهم قضیهٔ اول خواهدآمد. - ونیزرجوع کنید به برهان‌دوم قضیهٔ دوم و برهان سوم قضیهٔ چهارم .

(۳)- ابونصر منصوربن‌علی‌عراق‌جیلانی‌مولی‌امیرالمومنین، معروف به ابونصرعراق، استادابوریحان بیرونی بوده است . رجوع کنید به‌کتاب

«قربانی : ریاضیدانان ایرانی» صفحات ۲۲۱ تا ۲۳۹ - وی را گاهی ابونصر جعدی نیز نامیده‌اند .
(رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ ۳ ذیل برهان دوم قضیهٔ دوم)

برهان سیزدهم قضیهٔ اول(۱)**-** نخستین برهان(۲) از ابوعبدالله محمد بن‌احمد الشنّی(۳) .



(شکل ۲۰)

عمود DE را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ دیگر Z قطع کند. وقطر DK از دایره را که از نقطهٔ D می گذرد رسم می کنیم تا AB را در نقطهٔ H و AC را در نقطهٔ T قطع کند. این قطر بر AC عمود است (زیرا نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$ است).

اکنون KM را به موازات ZE رسم کرده Z را به K وصل می کنیم و می گوییم دومثلث AHT و DHE متشابهند (زیرا هردو قائم‌الزاویه‌اند وزوایای به رأس H از آنها باهم مساوی است) بنابراین $\widehat{TAH} = \widehat{EDH}$

پس $BC = ZK$ (وترهای روبه‌رو به زوایای محاطی متساوی)

ازطرف دیگر چهارضلعی ZKME مستطیل است زیرا زاویهٔ Z از آن رو به رو به قطر DK یعنی قائمه است وزوایای M و E از آن نیز قائمه‌اند پس $ZK = EM$

وچون دیدیم که $ZK = BC$ پس $EM = BC$

وچون عمود KM مساوی باعمود ZE است پس $AM = BE$[۴] بنابراین

داریم : $AM + ME = BE + BC$

واین همان‌چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم .

یادداشتهای مربوط به برهان‌سیزدهم قضیهٔ‌اول :

(۱)- عل: ص۷ - سوترA: ص۱۸و۱۹ - چد: ص۱۱-چم:ص۴۳.

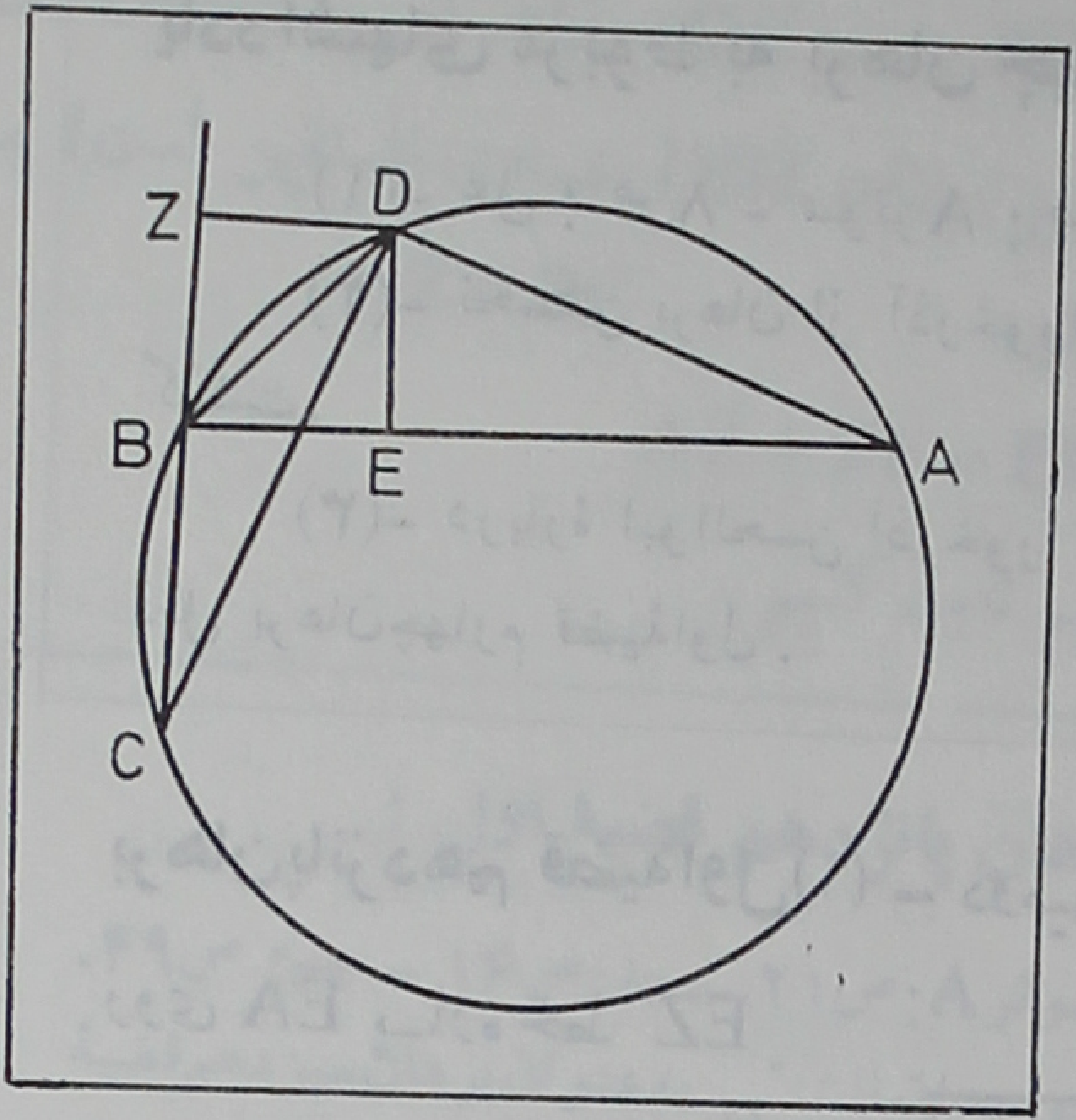
(۲)- یك‌برهان‌دیگراز ابوعبدالله‌الشنّی به‌عنوان برهان‌پانزدهم قضیهٔ اول خواهدآمد. و نیزرجوع کنید به برهان پنجم قضیهٔ‌دوم وآخرین برهان قضیهٔ‌چهارم وتبصرهٔ(۲) ذیل برهان‌پنجم قضیهٔ‌دوم.

(۳)- دربارهٔ ابوعبدالله‌الشنّی رجوع کنیدبه «بیرونی‌نامه» ص۵۳۰.

(۴)- دوعمود KM و ZE نسبت‌به‌قطری ازدایره‌که عمودبرAB رسم‌شود قرینهٔ یکدیگراند وهمچنین است دوپاره‌خط AM و EB.

برهان‌چهاردهم قضیهٔ‌اول(۱) - دومین برهـان(۲) از آذرخور ابن استاد جشنس(۳).

(استاد ازبین همهٔ برهانهایی که برای قضیهٔ‌اول در کتاب «استخراج‌الاوتار» آورده این‌برهان رابرای ذکردر کتـاب «قانـون مسعودی» انتخاب کرده است - رجوع کنید به «بیرونی‌نامه» ص۲۸۷) .



(شکل ۲۱)

پاره‌خط CB را امتداد داده از نقطهٔ D عمود DZ را بر آن فرودمی آوریم و پاره‌خطهای AD و DC را رسم می کنیم. (این دوپاره خط متساوی‌اند). (زیرا نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$ است). ازطرف دیگر دوزاویهٔ A و C که هر دومحاطی وروبه‌روی کمان $\widehat{BD}$ هستند متساویند. پس دومثلث قائم‌الزاویهٔ AED و CZD (درحالت وتر و یك زاویهٔ حاده) با هم مساویند و $DZ = DE$

و همچنین

$$CZ = AE \qquad (۱)$$

ازتساوی $DE = DZ$ نتیجه می‌شود که دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BDZ و BDE که در وتر مشترك‌اند با هم مساویند. پس:

$$ZB = EB \qquad (۲)$$

و از روی شکل واضح‌است که $CZ = ZB + BC$ و یا نظر به رابطهٔ (۲).

$$CZ = EB + BC \qquad (۳)$$

ازتساویهای (۱) و (۳) حاصل می‌شود:

$$AE = EB + BC$$

و این‌همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان چهاردهم قضیهٔ اول :

(۱)- عل : ص۸ - سوترA : ص۲۰ - چد : ص۶ - چم: ص۳۶.

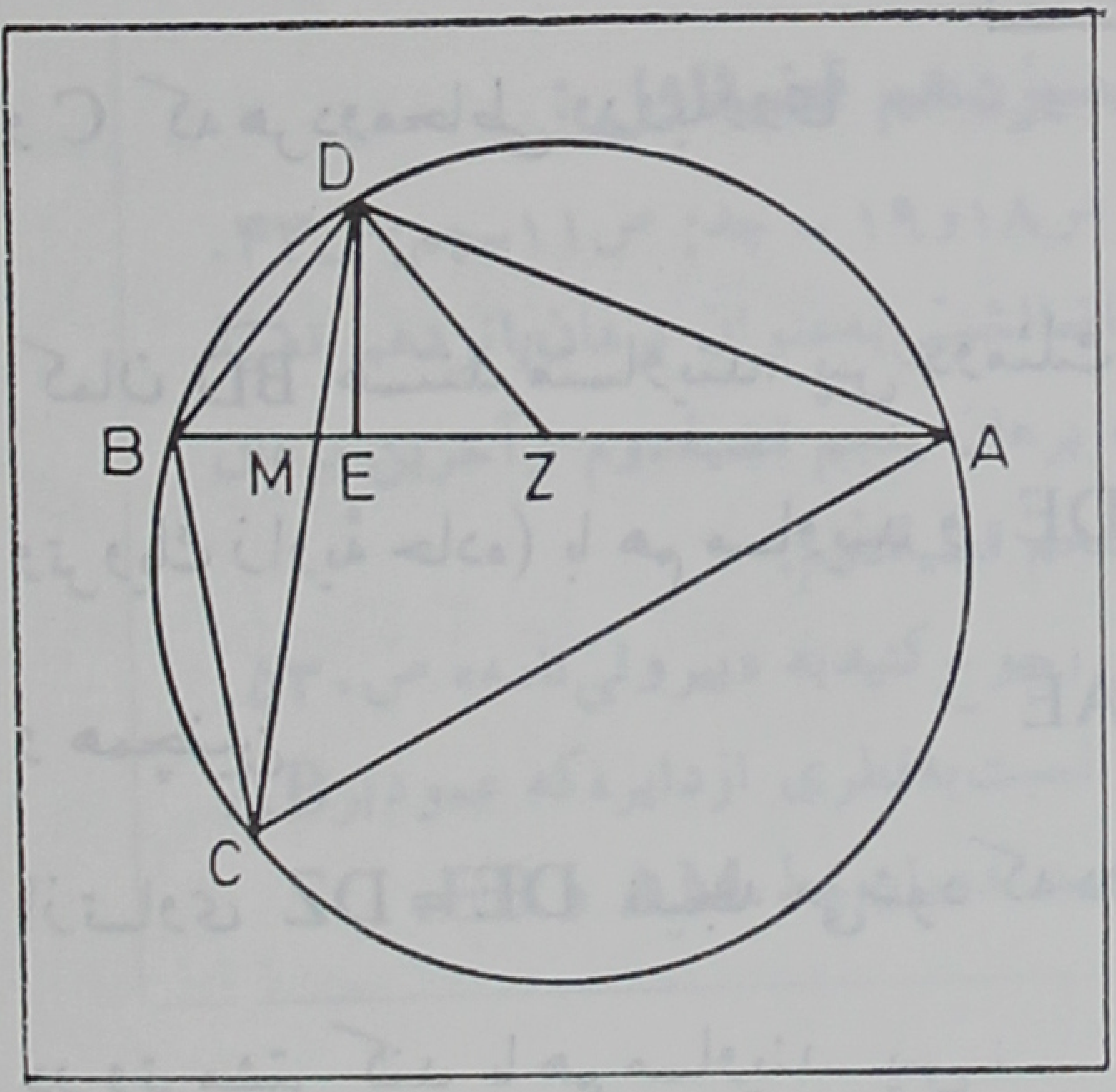
(۲)- نخستین برهان از آذرخورا به عنوان برهان چهارم قضیهٔاول گذشت.

(۳)- دربارهٔ ابوالحسن آذرخورا رجوع کنیدبه‌یادداشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان‌چهارم قضیهٔ‌اول.

برهان‌پانزدهم قضیهٔ‌اول(۱) - دومین برهان(۲) ازابوعبدالله الشنّی (۳).

روی EA پـاره خط EZ را مساوی با EB جدا کرده DA و DZ و DC و DB و AC و BC را رسم می کنیم.

دومثلث DZB و DAC هر دو متساوی‌الساقین هستند و دوزاویهٔ DCA و DBZ ازآنها که محاطی و رو به روی کمان $\widehat{AD}$ هستند متساویند پس :



(شکل۲۲)

$$\widehat{ADC} = \widehat{ZDB}$$

حال اگر فصل مشترك DC و AB را نقطهٔ M بنامیم و زاویـهٔ ZDM را که بین دوزاویهٔ متساوی فوق‌الذکر مشترك است حذف کنیم باقی می‌ماند :

$$\widehat{BDC} = \widehat{ZDA}$$

از طرف دیگر در دومثلث ZDA و BDC داریم $AD = DC$ (زیرا نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ADC}$ است) و $DZ = DB$ (زیرا مثلث DBZ متساوی الساقین است) پس دومثلث مذکور متساویند ونتیجه می‌شود :

$$AZ = BC$$

بنابراین :

$$AZ + ZE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم .

یادداشتهای مربوط به برهان پانزدهم قضیهٔ اول :

(۱)- عل: ص۹و۱۰ - سوترA: ص۲۱ - چد: ص۱۶ - چم: ص۴۹.

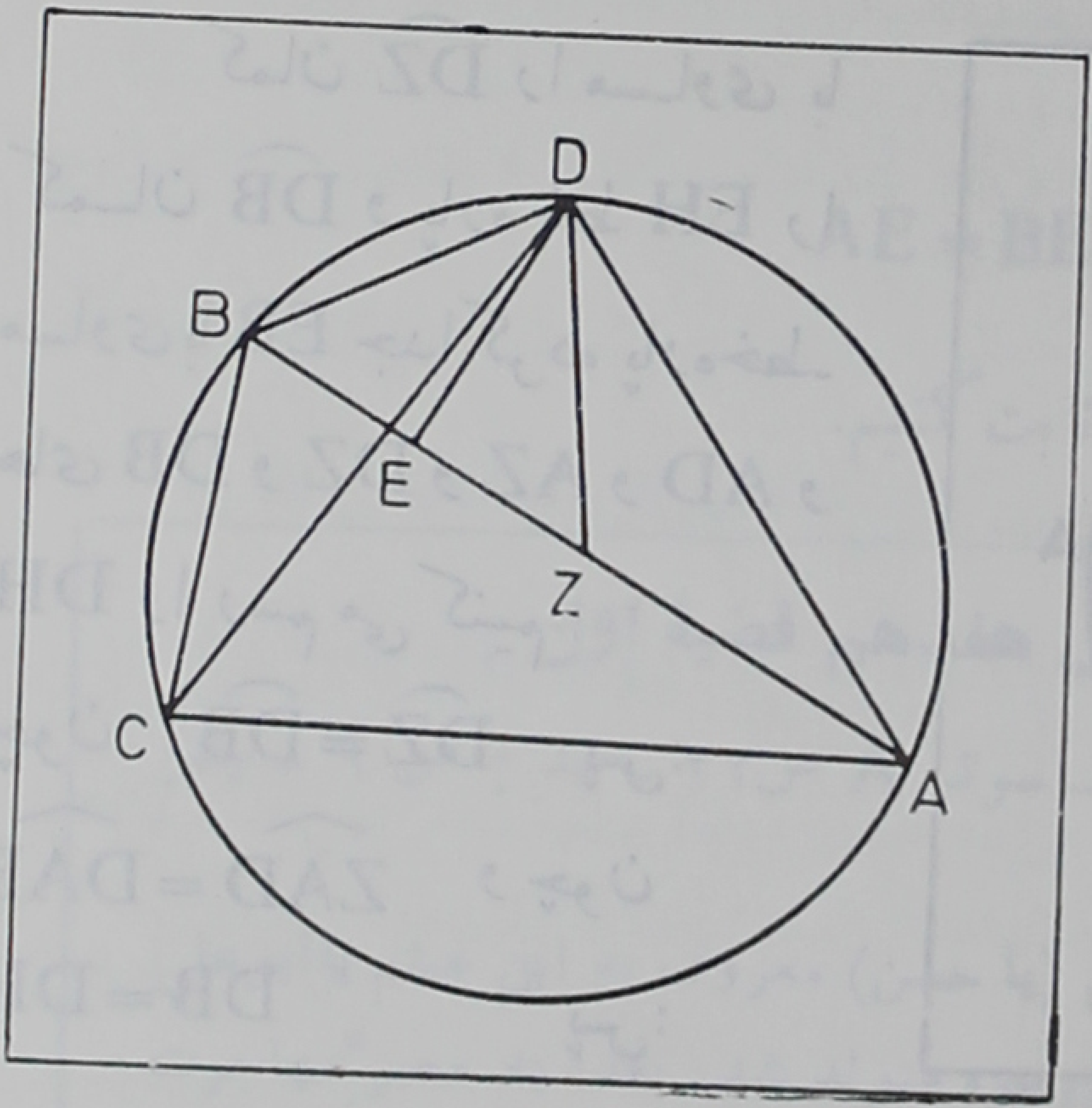
(۲)- نخستین برهان از ابوعبدالله الشنّی به عنوان برهان سیزدهم قضیهٔ اول گذشت - ونیز رجوع کنید به برهان پنجم قضیهٔ دوم و برهان چهارم قضیهٔ چهارم و تبصرهٔ ۲ ذیل برهان پنجم قضیهٔ دوم .

(۳)- دربارهٔ ابوعبدالله الشنّی رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ ۳ ذیل برهان سیزدهم قضیهٔ اول.

برهان شانزدهم قضیهٔ اول(۱) - دومین برهان(۲) از ابونصر منصور بن علی بن عراق(۳) .

از روی AB پاره‌خط AZ را مساوی با BC جدا و پاره‌خطهای AD و BD و DZ را رسم می کنیم . داریم :

$AD = DC$ و $AZ = BC$ و $\widehat{DCB} = \widehat{DAB}$ (زیرا هر دو محاطی و رو به روی کمان $\widehat{BD}$ هستند). بنابراین دومثلث ZDA



(شکل۲۳)

و BDC متساوی‌اند و درنتیجه $DZ = DB$ یعنی مثلث DBZ متساوی الساقین است وبنابراین ارتفاع DE از آن قاعدهٔ BZ رانصف می کند. یعنی داریم :
$BE = EZ$ وچون $AZ = BC$ پس:

$$AZ + ZE = AE = BE + BC$$

واین‌همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

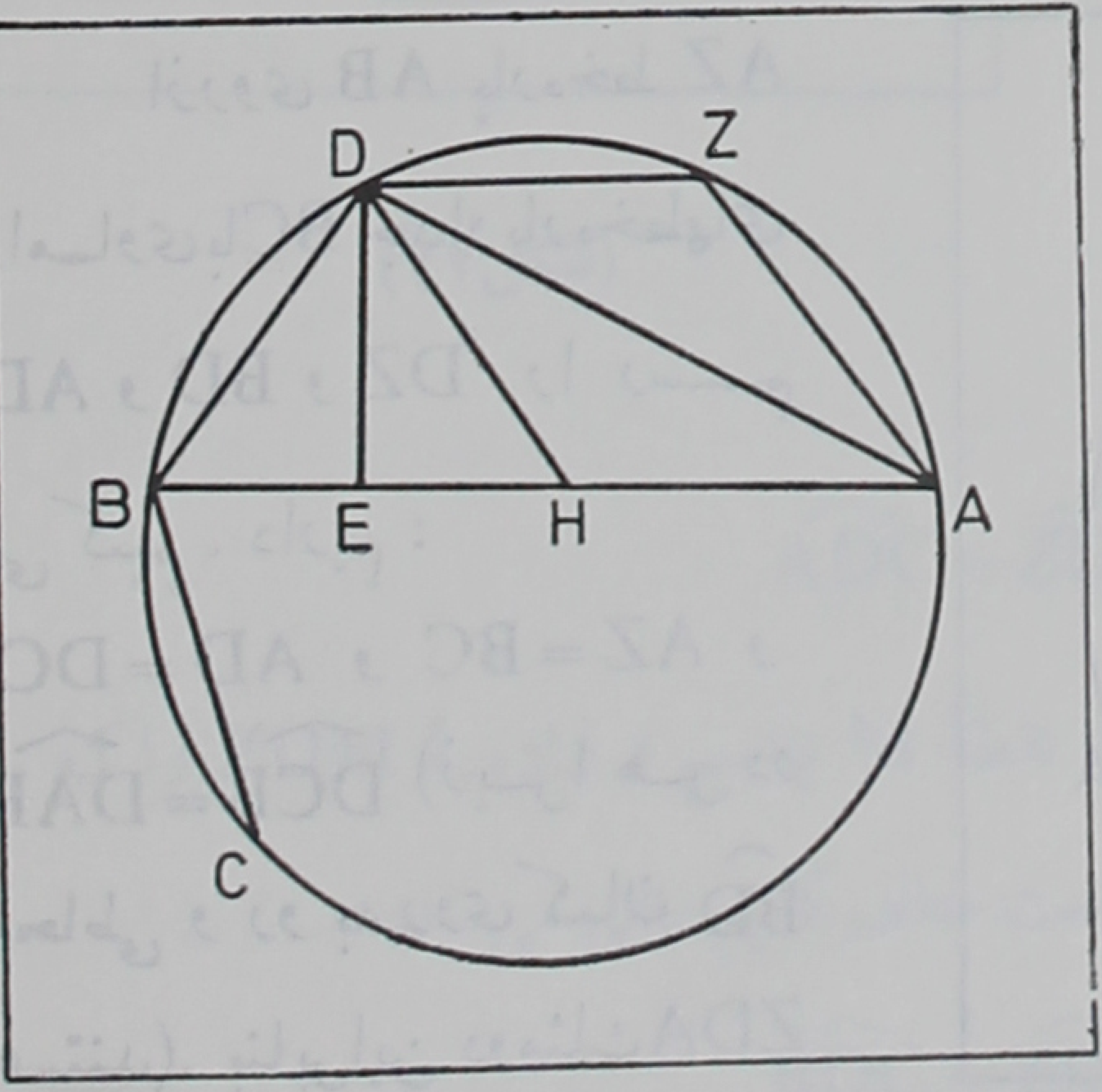
یادداشتهای مربوط به برهان شانزدهم قضیهٔ اول :

(۱)- عل : ص ۱۰ - سوتر A : ص۲۱و۲۲ - این برهان درنسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» نیامده‌است. درنسخهٔ «عل» دردنبال این برهان برهان‌دیگری برای قضیهٔ‌چهارم ذکر شده‌است.

(۲)- نخستین برهان ابونصرعراق به‌عنوان برهان‌دوازدهم قضیهٔ‌اول گذشت - و نیزرجوع کنید به برهان‌دوم قضیهٔ‌دوم و برهان‌سوم قضیهٔ‌چهارم.

(۳)- دربارهٔ ابونصرعراق رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ(۳) ذیل برهان‌دوازدهم قضیهٔ‌اول.

برهان‌هفدهم قضیهٔ‌اول(۱) - ازابوعلی‌حسن بن‌حسین بصری(۲).



(شکل۲۴)

کمان $\widehat{DZ}$ را مساوی با کمان $\widehat{DB}$ و پاره خط EH را مساوی با EB جدا کرده پاره‌خط‌های DB و DZ و AZ و AD و DH را رسم می کنیم.

چون $\widehat{DZ} = \widehat{DB}$ پس:
$\widehat{ZAD} = \widehat{DAB}$ وچون
$DB = DH$
پس:

$$\widehat{DBA} = \widehat{DHE} \quad (1)$$

وچون چهارضلعی BDZA محاطی است داریم :

$$\widehat{AZD} + \widehat{ABD} = 180^\circ \quad (2)$$

ازتساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$\widehat{AZD} + \widehat{DHE} = 180^\circ \quad (3)$$

ازطرف‌دیگر

$$\widehat{DHE} + \widehat{DHA} = 180^\circ \quad (4)$$

ازتساویهای (۳) و (۴) نتیجه می‌شود $\widehat{AZD} = \widehat{CHA}$

پس زوایای دومثلث AZD و AHD نظیر به‌نظیر متساوی‌اند و چون ضلع AD درآنها مشترک است پس این دومثلث متساوی می‌باشند ودر نتیجه $AZ = AH$.

اما $AZ = BC$ زیرا دو وتر روبه‌رو به کمانهای متساوی هستند (چون نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$ است و $\widehat{BD} = \widehat{DZ}$ پس $\widehat{AZ} = \widehat{BC}$) بنابراین $AH = BC$

و چون $HE = BE$ پس :

$$AE = BE + BC$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان هفدهم قضیهٔ اول :

(۱)- عل : ص ۱۰ و۱۱ - سوتر A ص۲۲ - چد : ص ۹ - چم: ص ۴۰

(۲)- ابوعلی‌حسن‌بن حسین (یا حسن) معروف به ابن هیثم یاابوعلی بصری درسال ۹۶۵م/۳۵۴ ه دربصره متولد شد. بعداً به مصر مهاجرت

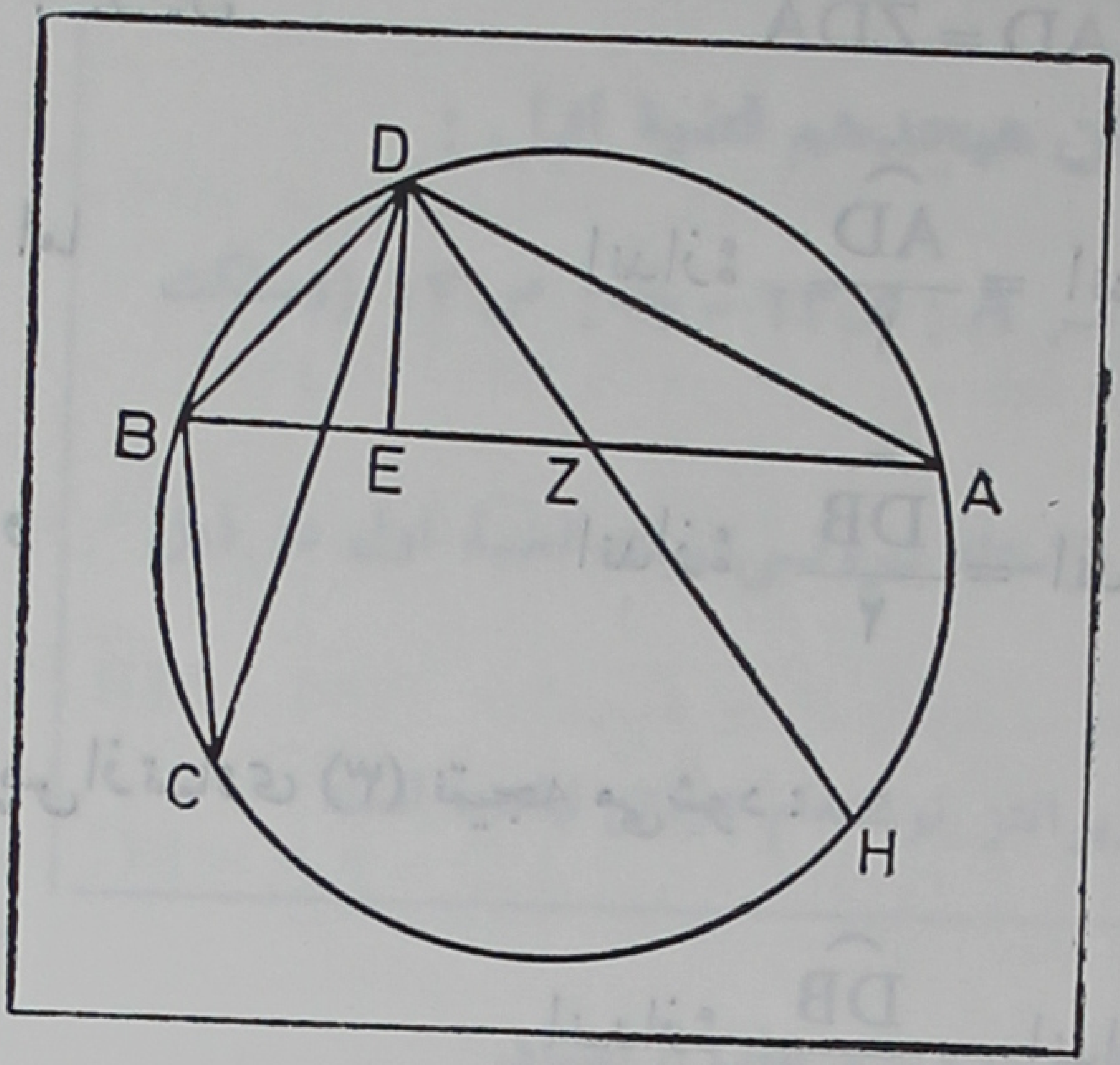
کرد تا آخر عمر در آنجا ماند و به سال ۱۰۳۹م/ ۴۳۰ هـ یا کمی پس از آن در قاهره درگذشت. وی منجم و ریاضیدان و طبیب و بزرگترین فیزیکدانهای دورهٔ اسلامی و از بزرگترین محققان در علم نور شناسی بود. ابن‌هیثم از بزرگترین دانشمندان دورهٔ اسلامی است و طرز فکر او را مانند طرز فکر دکارت می‌دانند. نزدیك به صد کتاب و رساله تألیف کرده‌است که معروفترین آنها کتاب «المناظر» است که موضوع آن نورشناسی است و کمال‌الدین ابوالحسن فارسی ریاضیدان و نورشناس ایرانی (۶۶۵ - ۷۱۸ هـ ق) آن را آراسته و کتاب معروف «تنقیح المناظر لذوی الابصار والبصائر» را در تنقیح آن تألیف کرده است.

دربارهٔ کتاب «تنقیح المناظر» رجوع کنید به «قربانی: دو ریاضی‌دان ایرانی» برای کسب اطلاع از فهرست آثار موجود ابن هیثم رجوع کنید به «بروکلمان G_1» ص ۶۱۷ و «بروکلمان S_1» ص ۸۵۱ و «سوتر M» ص ۹۱ به بعد.

برای کسب اطلاع از احوال ابن‌هیثم رجوع کنید به «لغت نامهٔ دهخدا» مادهٔ ابن هیثم و نیز رجوع کنید به «سارتن I» ج۱ ص ۷۲۱ و دایرة‌المعارف اسلامی و دایرة‌المعارف بریتانیکا و غیره

برهان هجدهم قضیهٔ اول(۱) - نخستین برهان(۲) از استاد بیرونی

(در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» این برهان، مانند تبصره‌ای، در دنبال برهان دیگری آمده‌است. اما در نسخهٔ «عل» بیرونی آن را جداگانه نوشته و به نام خود ثبت کرده‌است.)



(شکل ۲۵)

پاره‌خطهای DB و DC و DA را رسم کرده از روی EA پاره‌خط EZ را مساوی با EB جدا می کنیم و DZ را رسم کرده آن را امتداد می‌دهیم تا دایره‌را در نقطهٔ H قطع کند. می‌دانیم که AD = DC زیرا وترهای دو کمان متساوی هستند. و چون دو مثلث DBE و DZE متساویند (DE عمود منصف پاره‌خط BZ است) پس:

$$DB = DZ \quad (1)$$

از طرف دیگر $\widehat{BCD} = \widehat{BAD}$ (۲)

زیرا هر دو محاطی و روبه روی یك کمان هستند.

(اکنون ملاحظه می کنیم که در دو مثلث ADZ و CDB یك ضلع و یك زاویه از اولی با یك ضلع و یك زاویه از دومی نظیر به نظیر مساوی هستند و برای تساوی آن دو مثلث کافی است تساوی یك زاویهٔ دیگر از آنها را ثابت کنیم(۳)).

می گوییم $\widehat{DZB} = \widehat{ZDA} + \widehat{ZAD}$ (زاویهٔ خارجی مثلث)

وچون دو زاویهٔ DZB و DBZ باهم مساویند از تساوی فوق نتیجه می‌شود:

$$\widehat{DBZ} = \widehat{ZDA} + \widehat{ZAD}$$

بنابراین $\widehat{DBZ} - \widehat{ZAD} = \widehat{ZDA}$ (۳)

اما $\widehat{DBZ}$ اندازهٔ $= \frac{\widehat{AD}}{۲}$ اندازهٔ

و $\widehat{ZAD}$ اندازهٔ $= \frac{\widehat{DB}}{۲}$ اندازهٔ

پس از تساوی (۳) نتیجه می‌شود :

$\widehat{ZDA}$ اندازهٔ $= \frac{\widehat{AD}}{۲}$ اندازهٔ $- \frac{\widehat{DB}}{۲}$ اندازهٔ

اما چون نقطهٔ D وسط کمان ABC است طرف راست تساوی اخیر مساوی است با :

اندازهٔ $\frac{\widehat{BC}}{۲}$ یعنی : $\widehat{ZDA}$ اندازهٔ $= \frac{\widehat{BC}}{۲}$ اندازهٔ

و از طرف دیگر $\widehat{ZDA}$ اندازهٔ $= \frac{\widehat{AH}}{۲}$ اندازهٔ (زاویهٔ محاطی)

بنابراین $\widehat{AH} = \widehat{BC}$

پس : $\hat{BDC} = \hat{ZDA}$ (۴)

از تساویهای (۱) و(۲) و(۴) معلوم می‌شود که دو مثلث ADZ و CDB متساویند.

بنابراین $AZ = BC$ و

$$AZ + ZE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان هیجدهم قضیهٔ اول :

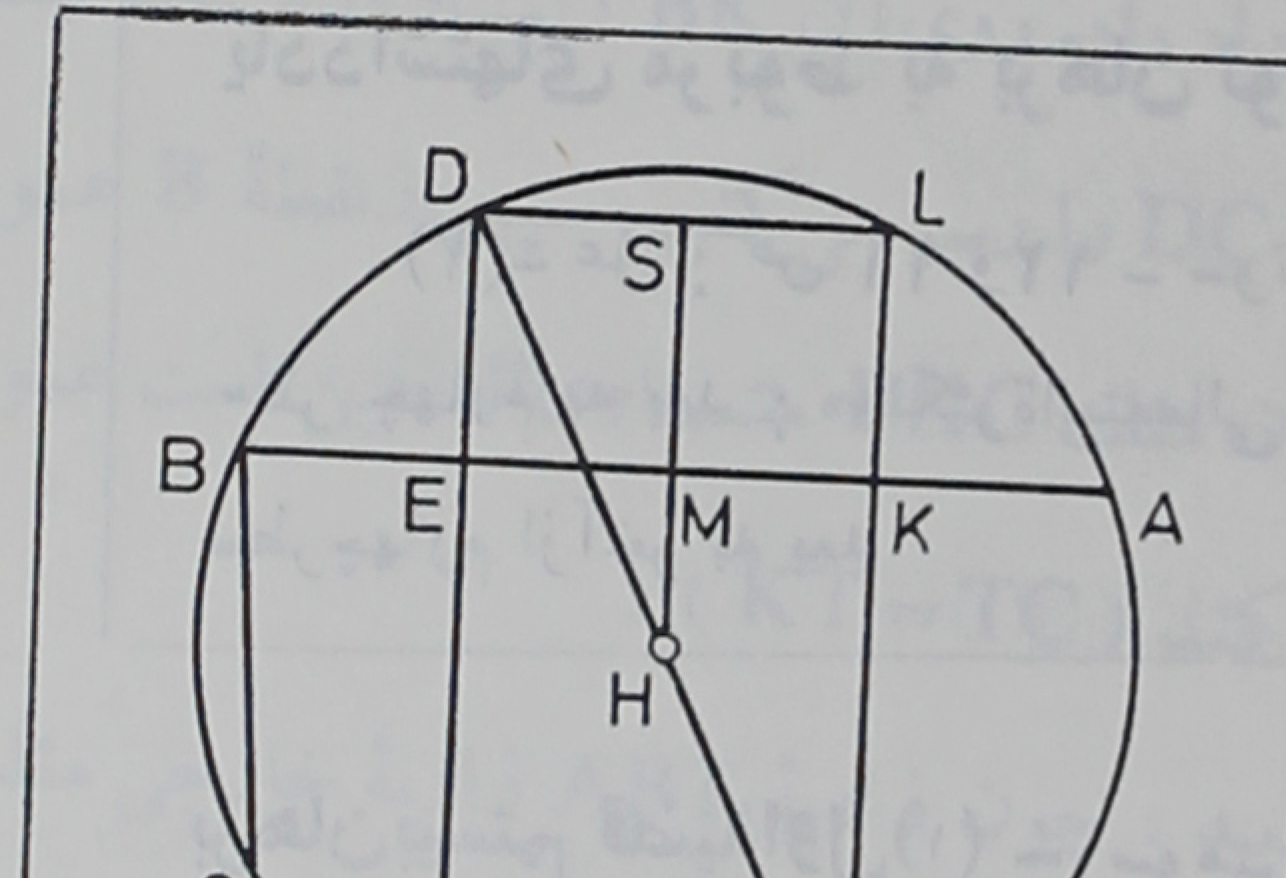
(۱)- عل: ص ۱۱ - سوتر A : ص۲۳ - چد : ص ۱۴ (وسلکت انافی تبیین ...) - چم: ص ۴۶

(۲)- چهاربرهان دیگر ازاستاد بیرونی برای قضیهٔ اول در ذیل خواهد آمد)

(۳)- آنچه در داخل دوپرانتز نوشته‌ام درمتن نیامده است

برهان نوزدهم قضیهٔ اول(۱) - دومین برهان ازاستاد.

(درنسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» این برهان دردنبال برهان دیگری آمده‌است. اما درنسخهٔ «عل» بیرونی آن راجداگانه نوشته و به نام خود ثبت کرده است.)



(شکل ۲۶)

عمود DE را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ Z قطع کند وقطر DHT ازدایره را که ازنقطهٔ D می گذرد رسم می کنیم (H مرکزدایره است) و از نقطهٔ T خط TKL را به‌موازات DZ رسم می کنیم.

چون DZ و TL ازدو انتهای یك قطر به‌موازات یکدیگر رسم شده‌اند داریم: $D\widehat{C}Z = T\widehat{A}L$. اکنون D را به L وصل می کنیم . زاویهٔ DLT قائمه است

(زیرا روبه‌رو به قطر DT است) وعلاوه‌براین می‌دانیم که‌زوایای LKE و DEK قائمه‌اند. پس‌چهارضلعی DEKL مستطیل‌است و بنابراین LD = EK .

اکنون از نقطهٔ H مرکزدایره خط HMS را به‌موازات DZ رسم‌می‌کنیم. این‌خط بروترهای AB و DL عموداست و آنها را نصف می‌کند پس LS = SD و AM = MB وواضح‌است که EM = MK پس نتیجه می‌شود که AK = EB و LD = KE = BC (زیرا کمان $\widehat{LD}$ با کمان $\widehat{BC}$ مساوی‌است) پس داریم :

$$AK + KE = EB + BC$$

و این‌همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

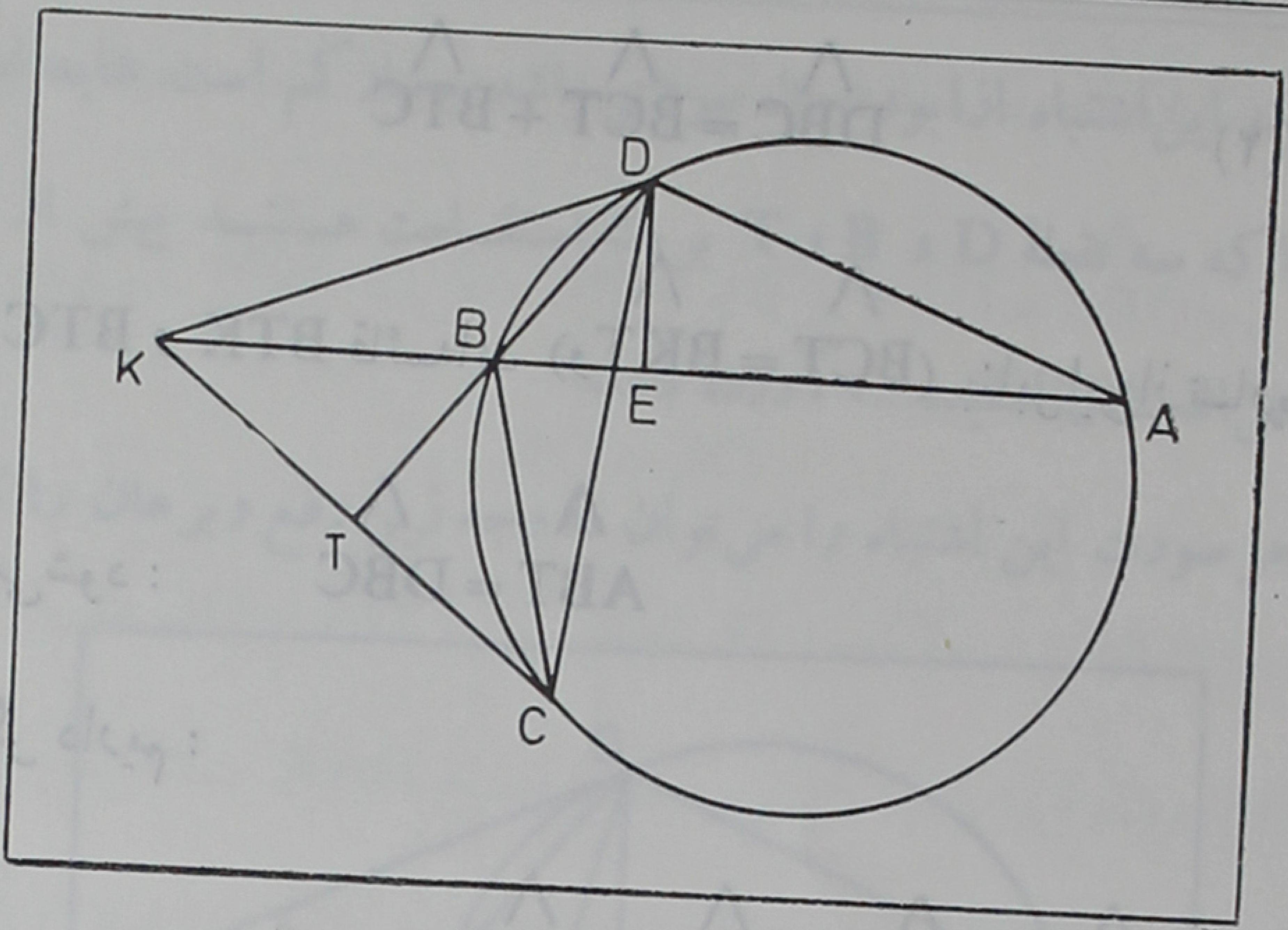
یادداشتهای مربوط به برهان نوزدهم قضیهٔ اول :

(۱)- عل : ص ۱۱ و۱۲ - سوتر A : ص ۲۳ و۲۴ - چد: ص ۱۰ سطر چهارم به بعد : «ولکثرة‌استعمالی هذه‌المقدمة ...» - چم : ص ۴۱ سطرچهارم ازآخر به بعد

برهان‌بیستم قضیهٔ‌اول(۱) - سومین‌برهان از استاد.

(این برهان را استاد از کتاب «فی‌المسائل المفیده والجوابات‌السدیده فی‌علل زیج‌الخوارزمی(۲)» تألیف خود نقل کرده‌است).

برطبق‌آنچه در نسخه‌های موجود « استخراج الاوتار » نوشته شده است در این برهان اشتباهی هست که بعداً به شرح و رفع‌آن خواهیم پرداخت . (رجوع کنید به‌تبصرهٔ ذیل همین‌برهان).



(شکل ۲۷)

این برهان در نسخه‌های موجود «استخراج الاوتار» با مختصر اختلافی چنین بیان شده است:

پاره‌خط AB را ازطرف B امتداد داده روی‌آن BK رامساوی با BC جدا و پاره‌خطهای CK و DK و DA و DC را رسم می کنیم. سپس‌ازنقطهٔ B عمود BT را بر CK فرود می‌آوریم . چون مثلث BKC متساوی‌الساقین است عمود BT قاعدهٔ‌آن یعنی CK را نصف می کند (KT = TC) .

سپس برهان چنین ادامه می‌یابد : چون زاویهٔ ABT زاویهٔ خارجی مثلث TBK است (رجوع کنید به تبصرهٔ ذیل‌همین برهان) پس :

$$\widehat{ABT} = \widehat{BTK} + \widehat{BKT} \qquad (1)$$

و نیزچون زاویهٔ DBC زاویهٔ‌خارجی مثلث BTC است پس :

$$\widehat{DBC} = \widehat{BCT} + \widehat{BTC} \qquad (۲)$$

اما زوایای BTC و BTK قائمه‌اند (و$\widehat{BCT} = \widehat{BKT}$) بنابراین از تساویهای (۱) و(۲) نتیجه‌می‌شود :

$$\widehat{ABT} = \widehat{DBC}$$

ازطرف دیگر داریم :

$$\widehat{ABT} + \widehat{TBK} = \widehat{DBC} + \widehat{CBT} = ۱۸۰^\circ$$

بنابراین سه نقطهٔ D و B و T بریك استقامت قـرار دارنـد و خط راست DBT عمودمنصف پاره‌خط CK است. بنابراین $DC = DK$. اما $DA = DC$ پس $DA = DK$ پس عمود DE پاره‌خط AK را نصف می کند و بنابراین:

$$AE = EB + BK$$

وچون $BK = BC$ پس :

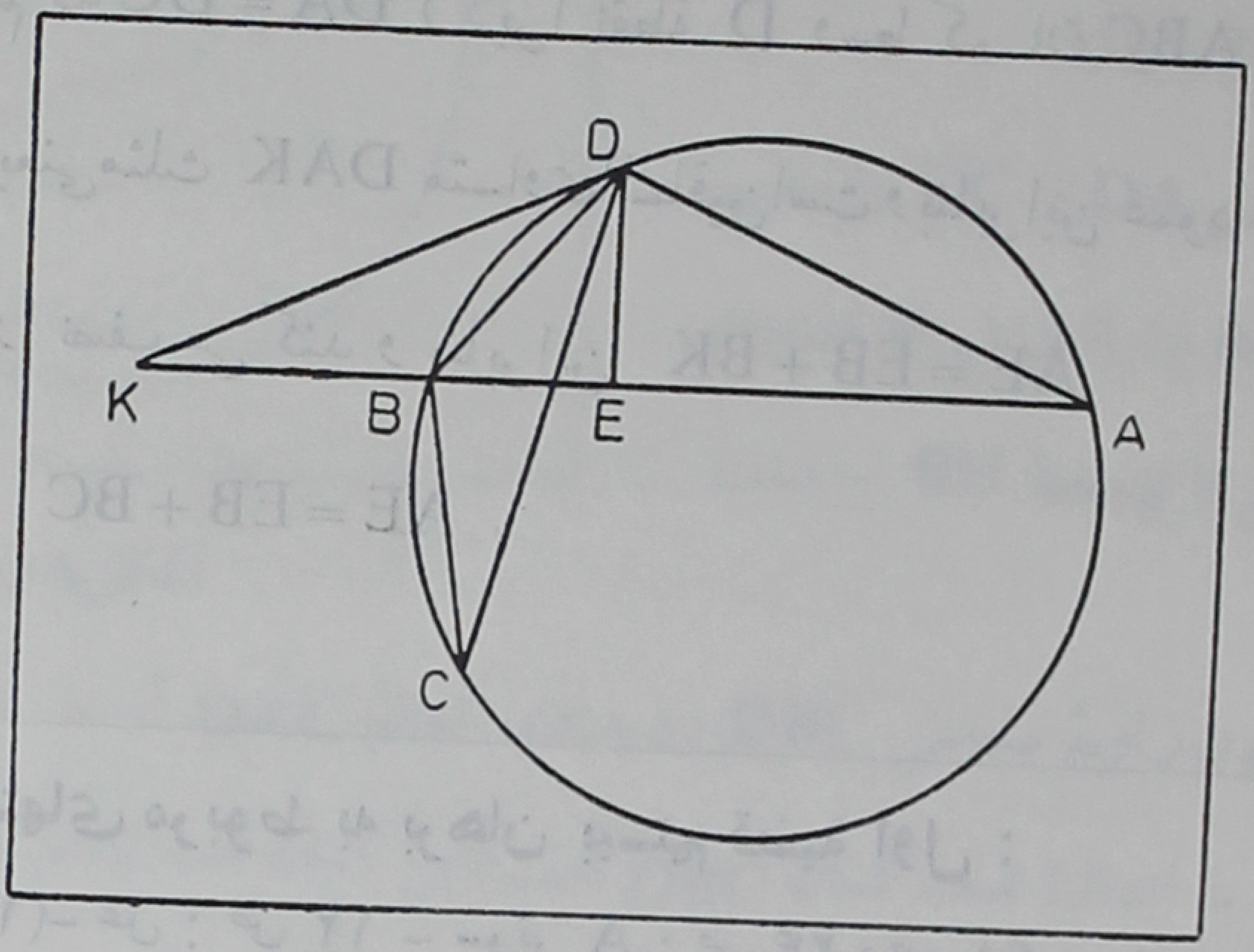
$$AE = EB + BC$$

واین همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصـره - دراین برهان اشتباهی‌رخ داده و آن‌این است که نوشته‌شده‌است: «ازنقطهٔ B عمود BT را بر CK فرود می آوریم» وپیش ازآنکه ثابت شود که سه نقطهٔ D و B و T بریك استقامت‌هستندنوشته شده‌است که : «زاویهٔ DBC زاویهٔ خارجی‌مثلث BTC است»

احتمال اینکه این اشتباه از ابوریحان بیرونی باشد بسیار کم است. شاید استاد اثبات این امر را که سه نقطهٔ D و B و T بریك استقامت هستند پیش از این مسئله در کتاب «فی المسائل المفیده...» آورده باشد.

درهرصورت این اشتباه را می‌توان به وجه زیر رفع و برهان را کامل کرد:



(شکل ۲۸)

AB را ازطرف B امتداد داده روی آن BK رامساوی با BC جدا و پاره‌خطهای DK و DA و DB و DC را رسم می کنیم.

واضح است که دوزاویهٔ DBK و DBA مکمل یکدیگرانـد. اکنون دو زاویهٔ DBC و DBA را درنظرمی گیریم. این‌دوزاویه هردومحاطی هستند واولی روبه‌روی کمـان $\widehat{DAC}$ ودومی‌روبه‌روی کمان $\widehat{DA}$ است. اما $\widehat{DA} = \widehat{DBC}$ پس اندازهٔ مجموع دوزاویهٔ DBC و DBA مساوی است با نصف مجموع اندازه‌هـای دو کمان $\widehat{DAC}$ و $\widehat{DBC}$ یعنی ۳۶۰ درجه پس این دوزاویه مکمل یکدیگرند.

اکنون می گوییم که چون زوایای DBC و DBK هـر دومکمـل زاویهٔ DBA

هستند باهم مساویند. بنا براین دومثلث DBC و DBK درحالت دوضلع و زاویهٔ بین آنها متساویند (BD مشترك و BK = BC و $\widehat{DBC} = \widehat{DBK}$) ودر نتیجه

$$DC = DK$$

وچون می‌دانیم که DA = DC (زیرا نقطهٔ D وسط کمان ABC است) پس DA = DK یعنی مثلث DAK متساوی‌الساقین است وبنا براین عمود DE قاعدهٔ AK ازمثلث را نصف می کند و بنابراین AE = EB + BK

و یا AE = EB + BC

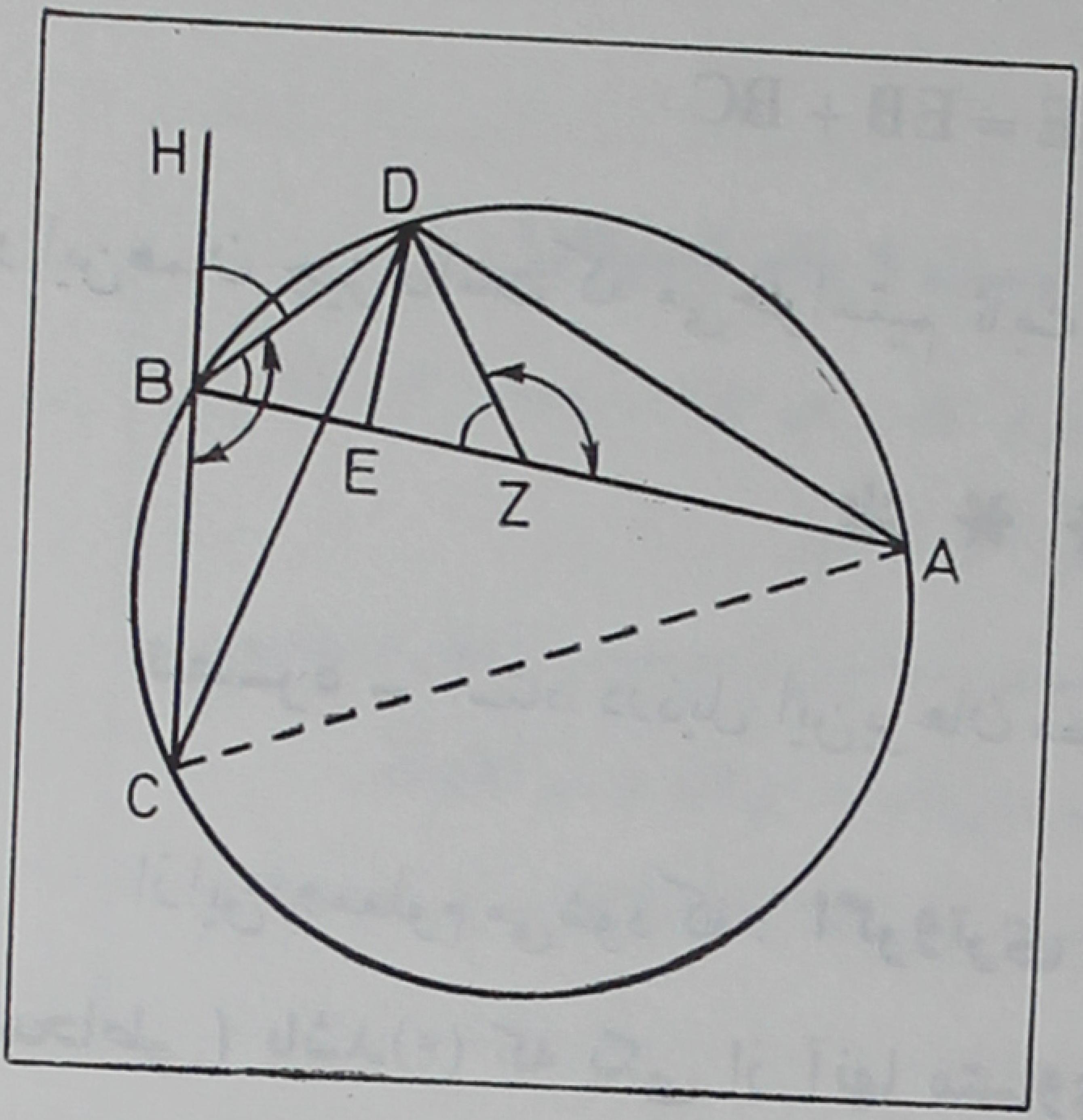
یادداشتهای مربوط به برهان بیستم قضیهٔ اول :

(۱)- عل : ص ۱۲ - سوتر A : ص ۲۴ وص ۶۸ - چد : ص۲۱ سطردوم به بعد «وقلت فی کتابی ...» - چم : ص ۵۶ سطرششم به‌بعد.

(۲)- دربارهٔ کتاب «فی المسائل المفیده ...» رجوع کنید به «بیرونی نامه» ص ۷۱ شمارهٔ ۲/۴۹

برهان بیست‌ویکم قضیهٔ‌اول - (۱) چهارمین برهان ازاستاد.

(درنسخهٔ «عل» این برهان با عنوان «برهان رابع‌لی‌استعملته فی علل زیج جبش (۲)» ثبت‌شده‌است ، امادرنسخه‌های چاپی «استخراج‌الاوتار» دردنبال برهان‌های دیگروبدون عنوان‌آمده است.)



(شکل۲۹)

روی EA پاره‌خط EZ را مساوی با EB جدا کرده DZ و DB را رسم می کنیم. واضح‌است که DB = DZ

سپس DA و DC را رسم کرده BC را ازطرف B امتداد می‌دهیم تا نیمخط BH به دست آید. چون زاویهٔ محاطی DBC روبه‌روی کمان $\widehat{DAC}$ است اندازهٔ زاویه DBH مساوی با اندازهٔ نصف کمان $\widehat{DBC}$ است‌واین کمان مساوی‌است با کمان $\widehat{AD}$. و چون زاویهٔ محاطی DBA روبه‌روی کمان $\widehat{AD}$ است پس :

$$\widehat{DBA} = \widehat{DBH} = \widehat{DZE}$$

بنابراین $\widehat{DBC} = \widehat{DZA}$ (مکملهای دوزاویهٔ متساوی)

وازطرف دیگر $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$ (محاطی‌ورو به‌روی‌یك کمان)

پس زوایای دومثلث ADZ و CDB نظیر به‌نظیر باهم مساوی‌اند و چون دراین دو مثلث DB = DZ پس دومثلث با هم مساویند و در نتیجه AZ = BC اما می‌دانیم که ZE = EB پس:

$$AZ + ZE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

❊ ❊ ❊

تبصره - استاد در ذیل این برهان مطلب زیر را افزوده است[۳]:

ازاین رومعلوم می‌شود که: **اگر وتری از دایره قاعدهٔ مشترك دومثلث (محاطی) باشد[۴] که یکی از آنها متساوی‌الساقین باشد و دیگری نباشد محیط مثلث اول بزرگتر ازمحیط مثلث دوم است[۵].**

زیرا اگر وتر AC را رسم کنیم این وتر را می‌توان قاعدهٔ مشترك دومثلث ADC و ABC دانست که اولی متساوی‌الساقین است و دومی متساوی‌الساقین نیست.

اما $AD > AE$ (مایل و عمود)

و $DC(=AD) > BE + BC$ (زیرا $EB + BC = AE$)

ازجمع دونامساوی فوق عضو به عضو حاصل می‌شود:

$$AD + DC > AE + BE + BC$$

واگر به دوطرف نامساوی فوق AC رابیفزاییم معلوم می‌شود که:

محیط مثلث ADC > محیط مثلث ABC

یادداشتهای مربوط به برهان بیست و یکم قضیهٔ اول :

(۱)- عل: ص ۱۲ و۱۳ - سوتر A : ص ۲۵ - چد : ص ۱۵ : «وقلت فی تعلیلی لزیج حبش ...» - چم : ص ۴۷.

(۲)- عنوان این کتاب این است: «تکمیل زیج حبش بالعلل وتهذیب اعماله من الزلل» رجوع کنید به «بیرونی نامه» ص۷۲ شمارهٔ ۲/۵۲.

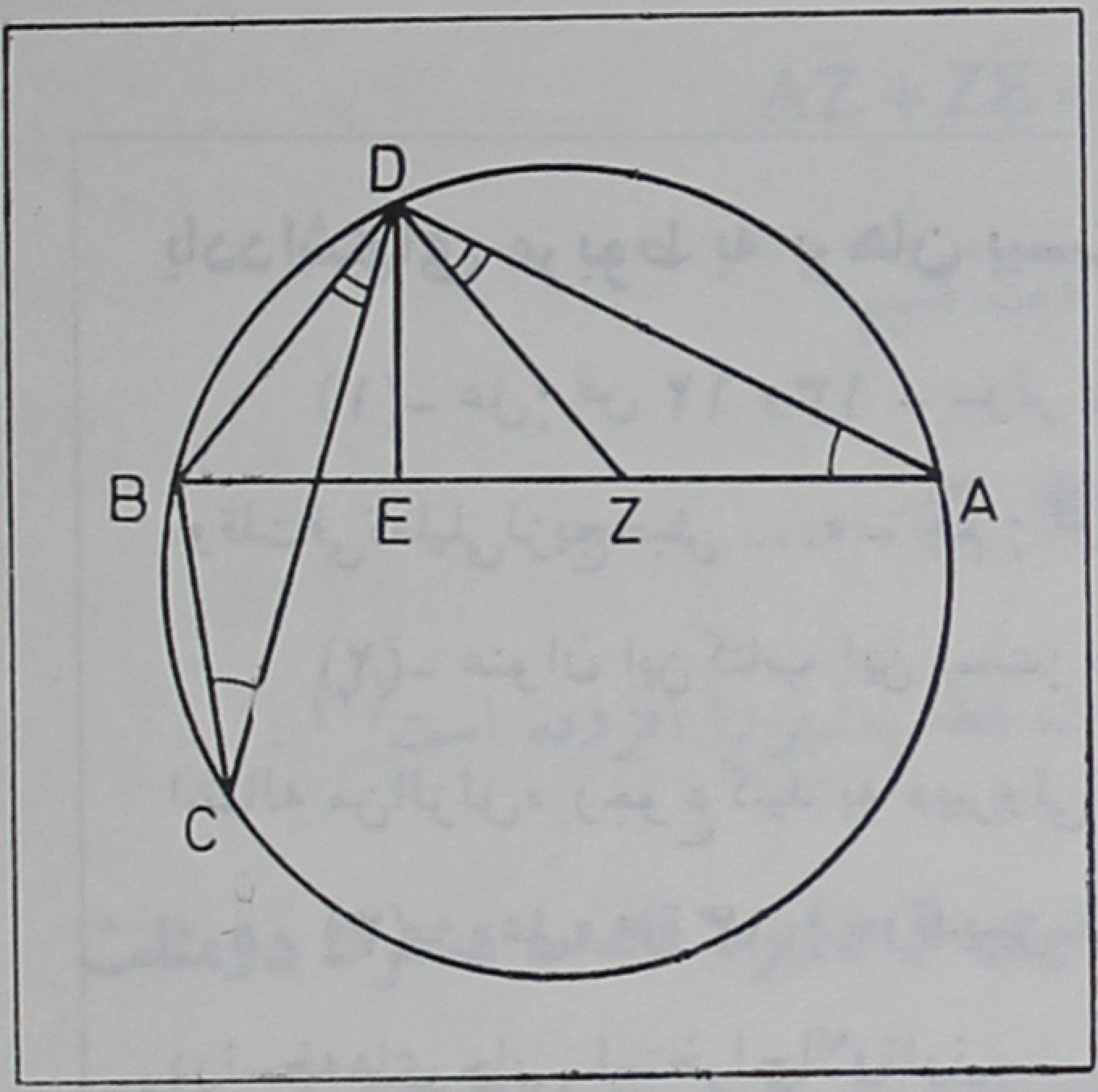
(۳)- «عل» ص ۱۳ : «وقدیبین من هذا انه اذا کان...»- این مطلب درنسخه‌های چاپی استخراج الاوتارنیست.

(۴)- دومثلث محاطی مذکورباید دریک طرف قاعدهٔ مشترک باشند.

(۵)- این قضیه را می‌توان به صورت زیربیان کرد : ازهمهٔ مثلثهایی که دریک قطعه‌دایره محاط شوند، و وترآن قطعه ضلع مشترک آنها باشد، آنکه متساوی‌الساقین است محیطش ازهمه بزرگتراست.

برهان بیست ودوم قضیهٔ اول(۱) - پنجمین برهان ازاستاد.

(این برهـان درنسخهٔ «عل» نیامده است. اما در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» برهانی برای تساوی دوپاره‌خط AZ و BC ذکر شده که استادآن را از کتاب خودموسوم به «تحصیل الراحة بتصحیح المساحة(۲)» نقل کرده است که می‌توان آن را به صـورت زیر کامل کـرد و برهان دیگری برای اثبات قضیهٔ اول دانست) .



(شکل ۳۰)

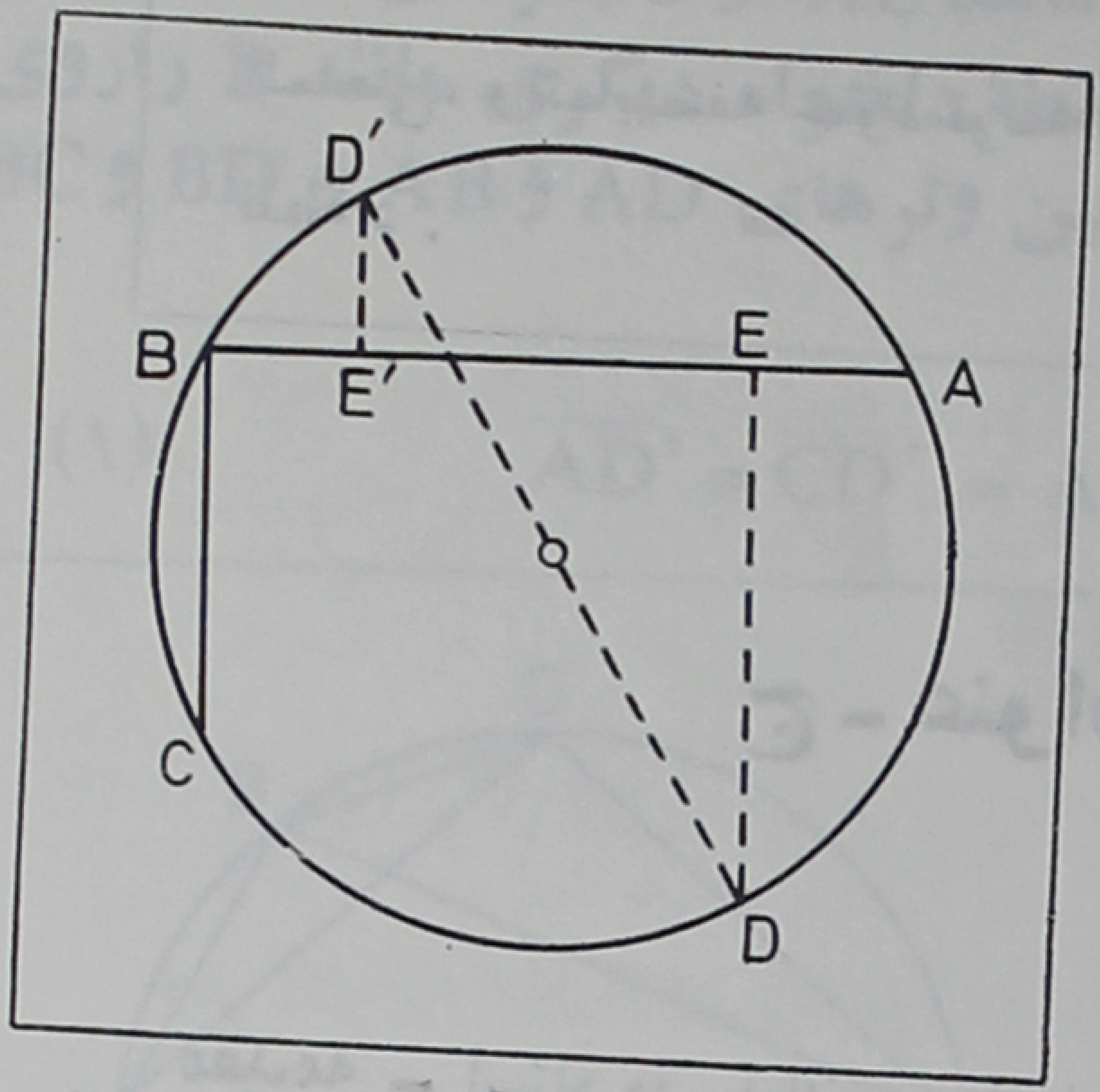
نقطهٔ D را به نقاط A و B و C وصل کرده نقطهٔ Z را روی وتر AB طوری اختیار می کنیم که زاویهٔ ADZ مساوی با زاویهٔ BDC باشد[۳]. چون زوایای A و C متساویند. (محاطی و روبه‌روی یك کمان هستند) و AD = DC دو مثلث ADZ و CDB (در حالت دو زاویه و ضلع بین آنها) باهم مساوی هستند و در نتیجه AZ = BC و DZ = BD . پس مثلث DBZ متساوی الساقین است و بنابر- این ارتفاع DE قاعدهٔ BZ آن را نصف می کند یعنی ZE = EB

بنابراین $$AZ + ZE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم:

تبصره - استاد این برهان را ابتدا برای حالتی ذکر کرده است که کمان $\widehat{ABC}$ و خط شکستهٔ ABC در یك طرف خط راست AC واقع باشند[۴] (مانند شکل ۳۰). سپس افزوده است که اگر کمان $\widehat{AC}$ و خط شکسته ABC در دو طرف خط راست AC باشند[۵] (مانند شکل ۳۱) یعنی اگر به جای آنکه وسط کمان $\widehat{ABC}$

را بگیریم ، وسط کمان $\overset{\frown}{AC}$ را که بقیهٔ دایره است اختیار کنیم و آن را نقطهٔ D بنامیم و از D عمود DE را بر AB فرودآوریم دیگر نقطهٔ E وسط خط شکستهٔ ABC نخواهد بود. بلکه در این صورت باید انتهای دیگر قطر مار بر D یعنی نقطهٔ D′ را اختیار کنیم تا قضیه صحت داشته باشد. یعنی داشته باشیم :



(شکل ۳۱)

$$AE' = E'B + BC$$

یادداشتهای مربوط به برهان بیست ودوم قضیهٔ اول :

(۱)- چد : ص ۱۴ - چم : ص ۴۷

(۲)- رجوع کنید به «بیرونی نامه» ص ۷۰ شمارهٔ ۲/۴۲

(۳)- چنانکه در تبصرهٔ صفحهٔ ۶۶ کتاب حاضر ذکر کردم زاویهٔ DBC همیشه منفرجه است. بنابر این زاویهٔ BDC حاده می‌باشد و وقتی زاویهٔ ADZ را مساوی با زاویهٔ BDC اختیار می کنیم نقطهٔ Z بین نقاط A و E قرار می گیرد. (رجوع کنید به شکل ۳۰)

(۴)- وفی کتاب تحصیل الراحة بتصحیح المساحة، احتجت الابانة علی- اتفاق الحال فی انطباق اخمص القوس علی حدبة الخط المنحنی دون تقابلهما، اعنی بالحالة انتصاف الخط مع انتصاف القوس.

(۵)- فان قوبل بین اخمصی قوس ادب والخط المنحنی (= المنكسر) اعنی الكاین فی كمال هذه القوس الی تمام الدایرة، لم ینصف عمود ده ذلك الخط

المنحنی، وانماینصفه عمود قوسه اعنی الخارج من طرف القطر الی طرفه الاخر نقطة د .

ج - عنوان قضیهٔ دوم

مقدمه - استاد در پایان برهانهایی که برای قضیهٔ اول ذکر کرده نوشته است[۱] :

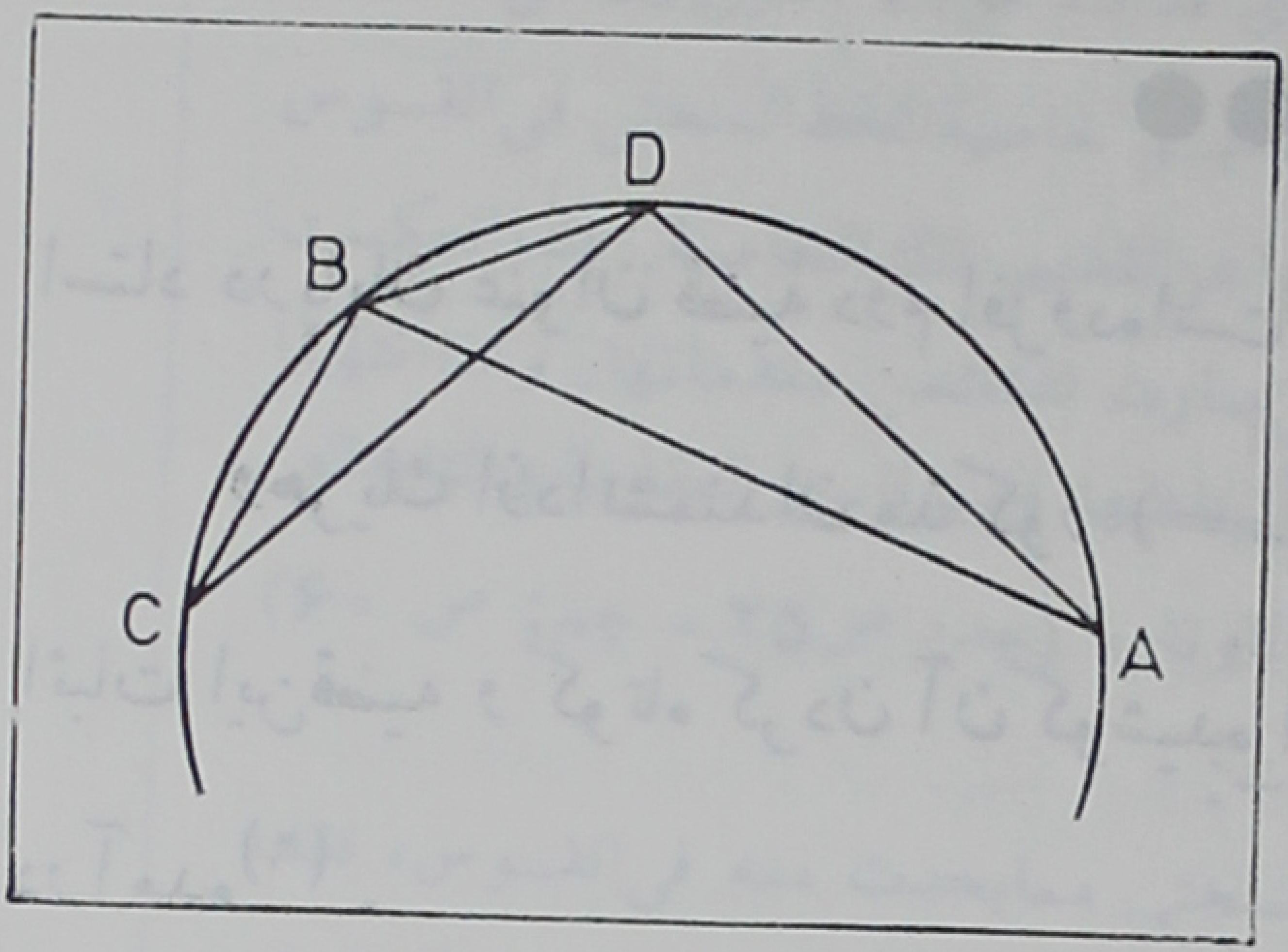
این بود آنچه از روشهای دانشمندان در بارهٔ برهان آوردن بر این قضیه می‌دانستم. اما یونانیان را قضیهٔ دومی نیز هست که مبرزان در این صناعت (= هندسه) برهانهایی برای درستی آن آورده‌اند. در بعضی از این برهانها ناچار باید از قضیهٔ اول یعنی از خاصیت خط منکسر محاط در دایره استفاده کرد. در این صورت قضیهٔ اول مقدمه‌ای برای قضیهٔ دوم خواهد بود. اما در برخی دیگر از این برهانها احتیاجی به استفاده از قضیهٔ اول نیست، بلکه برعکس می‌توان قضیهٔ اول را با استفاده از آنها به ثبوت رسانید. در این حالت قضیهٔ دوم را می‌توان مقدمه‌ای برای قضیهٔ اول دانست.

اینک با برشمردن برهانهایی که برای این قضیه آورده‌اند به این مطلب توجه کرده در هر مورد بین قضیهٔ مقدم و قضیهٔ تابع آن تمیز قائل خواهم شد.

سپس استاد قضیهٔ دوم را با عبارتی بیان کرده است که می‌توان آن را با اصطلاحات کنونی به صورت سادهٔ زیر در آورد[۲] .

عنوان قضیهٔ دوم ـ اگر کمانی مانند $\widehat{AC}$ از دایـره‌ای را در نظـر گرفته وسط آن را نقطهٔ D بنامیم ولقطهٔ دلخواه دیگری مانند B را روی همان کمان اختیار کنیم رابطهٔ زیر بین وترهای AD و AB و BD و BC برقرار خواهد بود :

$$\overline{AD}^2 = \overline{CD}^2 = AB \times BC + \overline{BD}^2 \qquad (۱)$$



(شکل۳۲)

فرض:
- اولاً $\widehat{AC}$ کمانی است از دایره .
- ثانیاً نقاط B و D روی کمان $\widehat{AC}$ واقعند.
- ثانیاً $\widehat{AD} = \widehat{DC}$

حکم قضیهٔ‌دوم یعنی رابطهٔ (۱) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد :

> مربع هریك‌ازدووتر AD و CD که نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{AC}$ را به دوسر آن وصل‌می کنند مساوی است با حاصل‌ضرب فواصل نقطهٔ دلخواه B متعلق به‌کمان $\widehat{AC}$ ازدوسرهمان‌کمان به علاوهٔ مربع AD.

✲✲✲

استاد همین قضیه را با استفاده از اصطلاح «جیب[۳]» بـه وجهی دیگر نیز عنوان کرده است[۴] :

> اگر نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{AC}$ ازیك‌دایره‌ونقطهٔ B متعلق‌به‌همان‌کمان باشد داریم :
>
> $$(\text{جیب}\,\widehat{AD})^2 = (\text{جیب}\,\widehat{BD})^2 + \text{جیب}\,\widehat{BC} \times \text{جیب}\,\widehat{AB}$$

واین معادل است با اتحاد مثلثاتی زیر: (اگر α و β دو کمان متوالی از یك دایره باشند آنگاه داریم):

$$\sin\alpha . \sin\beta + \sin^{۲}\left(\frac{\alpha-\beta}{۲}\right) = \sin^{۲}\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)$$

●●●

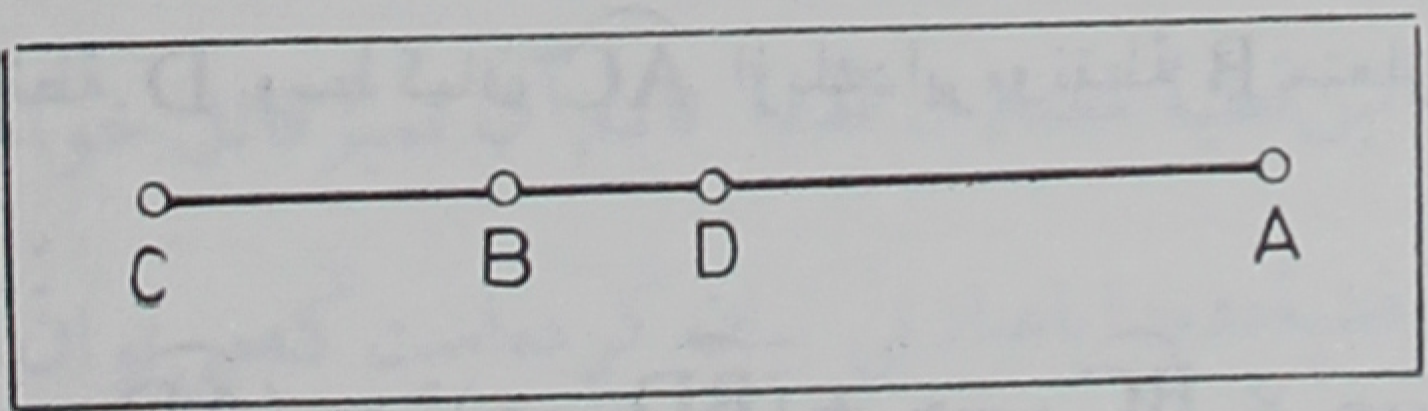
استاد در پایان عنوان قضیهٔ دوم افزوده‌است[۵]

وهریك ازدانشمندان مذکور (= مبرزان‌درعلم هندسه) درکاستن‌ازدشواری اثبات این‌قضیه و کوتاه کردن آن کوشیده است و این برهان به صورتهای مختلف درآمده[۶] .

●●●

تبصره - اگر نقاط A و D و B و C بریك خط راست واقع باشند باز حکم فوق بنابر قضیهٔ پنجم ازمقالهٔ دوم اصول اقلیدس[۷] صحیح‌است. این قضیه را می‌توان با اصطلاحات کنونی‌چنین بیان کرد :

> اگرپاره خطی مانند AC را درنظر گرفته وسط‌آن رانقطهٔ D بنامیم وروی AC نقطهٔ دلخواه B را اختیارکنیم رابطهٔ زیربرقرار خواهدبود:
>
> $$\overline{AD}^{۲} = \overline{CD}^{۲} = AB.BC + \overline{BD}^{۲}$$



(شکل۳۳)

یادداشتهای مربوط به عنوان قضیهٔ دوم :

(۱)- عل: ص ۱۳- (این عبارات به این صورت درنسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» نیامده است) :

«فهذاما کان اجتمع عندی من طرق الفضلاء فی اقامة البرهان علی صحة هذه الدعوی - ولليونانيين دعوی أخری قداقام هولاء المبرزون فی الصناعة براهین علی صحتها. منها مااضطر الی تقدیم خاصیة الخط المنحنی فی القوس فصار لذلك من توابعها. ومنها مااستغنی عن تقدیم تلك الخاصیة. فلما انعکست وافکن فیها تصحیح تلك الدعوی الاولی صارت لذلك من مقدماتها. واذا انتهینا الی ذلك عند تعدید ما لهم من البراهین أتیناعنها ومیزنا بین المقدمة والتابعة»

درنسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (چد: ص ۲۵ - چم: ص ۶۰) به جای عبارات فوق نوشته شده‌است:

«ولانا اذا عبرنا عن هذا الخط المنحنی ممایحدث منه فی القوس، فقلنا اذاقسم قوس... کانت خاصیة حسنة نافعة - وصار کل واحد مماتقدم فی الدعوی الاولی وهی مقدمة للاخری، وربما اسبقت کل واحدة عن صاحبتها.

(۲)- عل: ص ۱۳ :

«وهذه هی الدعوی الاخری . اذا انحنی قوس من دایرة خط فقسم القوس بنصفین و انحنافی تلك القوس ایضا خط آخر فقسمها بقسمین مختلفین فان ضرب احدقسمی الخط المنصف للقوس فی الاخر یساوی ضرب احد قسمی الخط القاسم للقوس بقسمین مختلفین فی الاخر مع مربع وترمابین نقطی انقسام القوس بهما.»

درنسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (چد: ص ۲۵ - چم: ص ۶۰) این قضیه چنین ذکرشده است :

«اذاقسم قوس بنصفین وبقسمین مختلفین فان مضروب وتری القسمین المختلفین احدهما فی الاخر مع مربع وترمابین النصف و بین احد المختلفین مساو لمربع وترنصف القوس»

(خلاصهٔ هردو صورت فوق همان است که به عنوان قضیهٔ دوم در متن نوشته‌ام) .

(۳)- دربارهٔ اصطلاح جیب وانواع آن رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحات ۱۰۶ تا ۱۰۹

(۴)- چد : ص ۲۵ - چم ص ۶۰ (این قسمت در نسخهٔ «عل» نیست) :

«اوعبرناعنهـا بالجیوب التی هی انصاف اوتار اضغاف القسی وقلنـا ان ضرب جیب ...»

(۵)- «عل» ص ۱۳ سطر ششم وهفتم ازآخر: «وکل واحد من هؤلاء قدخفف ثقل هذه المؤامرة وقصرطولها فخرجت علی هیآت مختلفه ...»

درنسخه‌های چاپی استخراج الاوتار (چد: ص ۲۷ - چم:ص۶۳) به جای عبارت فوق چنین آمده است: «ومن الفضلاء من خفف ثقل هذه المؤامرة، ومنهم من طول قصرها فخرجت علی هیآت مختلفة ...»

(۶)- مثلاً دربرهان اول قضیهٔ دوم ابتدا قضیهٔ دیگری ثابت شده و سپس قضیهٔ دوم ازآن نتیجه گرفته شده است .

(۷)- رجوع کنید به «هیث E» ج ۱ ص ۳۸۲ به بعد (درآنجابحث جالبی دربارهٔ این قضیه ونتایج آن خواهید یافت) ونیز رجوع کنید به «تحریر اقلیدس» ص ۳۸

د - برهانهای قضیهٔ دوم

(آنچه در تبصرهٔ پایان برهانهای قضیهٔ اول « صفحهٔ ۱۰۸ » نوشته‌ام دربارهٔ برهانهای قضیهٔ دوم نیز صادق است).

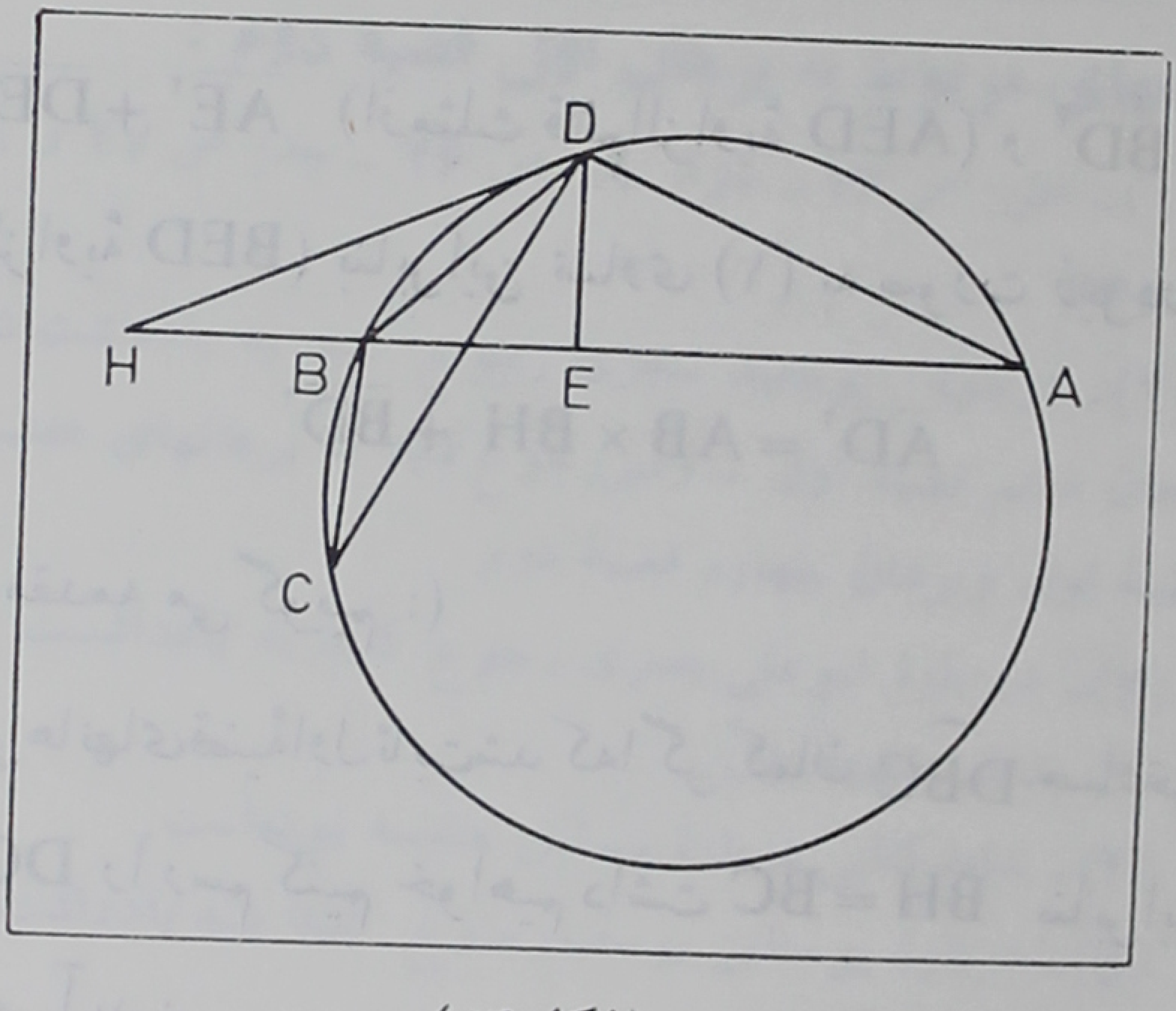
برهان اول قضیهٔ دوم(۱) - ازیکی ازیونانیان وابوسعید سجزی(۲) و ابوعلی بصری(۳) (= ابن هیثم) .

استاد درآغاز این برهان متذکر شده است که آن را درمسائلی(۴) که یوحنا

بن یوسف(۵) ازیونانی به عربی ترجمه کرده‌است یافته و خاطرنشان کرده است که ابوسعید سجزی و ابوعلی بصری این قضیه را بر حسب اتفاق همین گونه ثابت کرده‌اند(۶).

(ابتدا ملاحظه می کنیم که :

هرگاه نقطهٔ دلخواهی روی قاعدهٔ یك مثلث متساوی‌الساقین اختیار کنیم که آن را به دوقسمت نامتساوی تقسیم کند وآن نقطه را به رأس مثلث وصل کنیم حاصل ضرب دوقطعهٔ قاعده به علاوهٔ مربع پاره‌خطی که نقطهٔ تقسیم را به رأس‌مثلث وصل‌می کند مساوی است با مربع ساق مثلث . (۷)



(شکل۳۴)

برهان قضیهٔ فوق ـ روی قاعدهٔ AH از مثلث متساوی‌الساقین DAH ‏(DA = DH) نقطهٔ دلخواه B را قسمی اختیار می کنیم که DB بر AH عمود نباشد و D را به B وصل می کنیم.

باید ثابت کنیم که :

$$AB \times BH + \overline{BD}^{2} = \overline{AD}^{2}$$

دایرهٔ محیطی مثلث ADB را رسم کرده[۸] عمود DE را بر AB فرود می آوریم. چون E وسط AH است و نقطهٔ B پاره‌خط AH را به‌دو قسمت نامتساوی تقسیم کرده است (نظر به قضیهٔ پنجم ازمقالهٔ دوم اصول اقلیدس[۹]) داریم :

$$\overline{AE}^{2} = AB \times BH + \overline{EB}^{2}$$

اگر به دوطرف تساوی فوق $\overline{DE}^{2}$ را بیفزاییم حاصل می‌شود:

$$\overline{AE}^{2} + \overline{DE}^{2} = AB \times BH + \overline{EB}^{2} + \overline{DE}^{2} \qquad (۱)$$

اما $\overline{AE}^{2} + \overline{DE}^{2} = \overline{AD}^{2}$ (ازمثلث قائم‌الزاویهٔ AED) و $\overline{EB}^{2} + \overline{DE}^{2} = \overline{BD}^{2}$ (ازمثلث قائم‌الزاویهٔ BED) بنابراین تساوی (۱) به صورت زیر درمی آید :

$$\overline{AD}^{2} = AB \times BH + \overline{BD}^{2} \qquad (۲)$$

(پس از بیان این مقدمه می گوییم :)

درضمن برهان‌های قضیهٔ اول ثابت‌شد که اگر کمان $\overset{\frown}{DBC}$ مساوی با کمان $\overset{\frown}{AD}$ باشد و BC و DC را رسم کنیم خواهیم داشت $BH = BC$ بنابراین تساوی (۲) به صورت‌زیر درمی آید :

$$\overline{AD}^{2} = AB \times BC + \overline{BD}^{2}$$

واین‌همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

●●●

استاد در پایان این برهان نوشته‌است(۱۰) که قضیهٔ دوم در این مورد از **لواحق** محسوب می‌شود(۱۱). (زیرا در برهان آن از قضیهٔ اول استفاده‌شده‌است). وافزوده‌است: اما ابوسعید سجزی و ابوعلی بصری (= ابن هیثم) ابتدا خط شکستهٔ ABC را در کمان $\widehat{ADBC}$ از دایره محاط کرده و ثابت کرده‌اند که در این صورت

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$$

و برای اثبات این رابطه BH را روی امتداد AB مساوی با BC جدا کرده (و با استفاده از قضیهٔ اول ثابت کرده‌اند که مثلث ADH متساوی‌الساقین است(۱۲)) و برهان را مانند فوق کامل کرده‌اند.

یادداشتهای مربوط به برهان اول قضیهٔ دوم:

(۱)- عل: ص ۱۳- سوتر A: ص ۲۶ - چد: ص ۲۷ و ۲۸- چم: ص ۶۳ و ۶۴

(۲)- دربارهٔ ابوسعید سجزی رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان هفتم قضیهٔ اول - ونیز رجوع کنید به برهانهای هفتم وهشتم و نهم قضیهٔ اول وبرهان چهارم قضیهٔ دوم

(۳)- در بارهٔ ابوعلی بصری رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۲) ذیل برهان هفدهم قضیهٔ اول.

(۴)- شاید کتابی دربارهٔ مسائل هندسه بوده‌است.

(۵)- دربارهٔ یوحنابن یوسف رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۵) ذیل برهان پنجم قضیهٔ اول .

(۶)- «عل» ص ۱۳: «برهان علیها وجدته فی‌المسائل التی‌ترجمها یوحنابن یوسف من‌الیونانی الی‌العربی و اتفق‌بعینه‌لابی سعیدالسجزی و ابی علی‌البصری بطریقة واحدة» .

(۷)- این قضیه در متن عربی چنین عنوان شده است: «کل مثلث

متساوی الساقین یخـرج فیه خط من الزاویة الی القاعـده فیقسمها بقسمین مختلفین فان ضرب احد القسمین المختلفین فی الاخر ومربع ذلك الخـط مساو لمربع احد الساقین («عل»: ص ۱۳ و ۱۴)

(۸)- این دایره درقسمت دوم برهان به کارخواهدآمد.

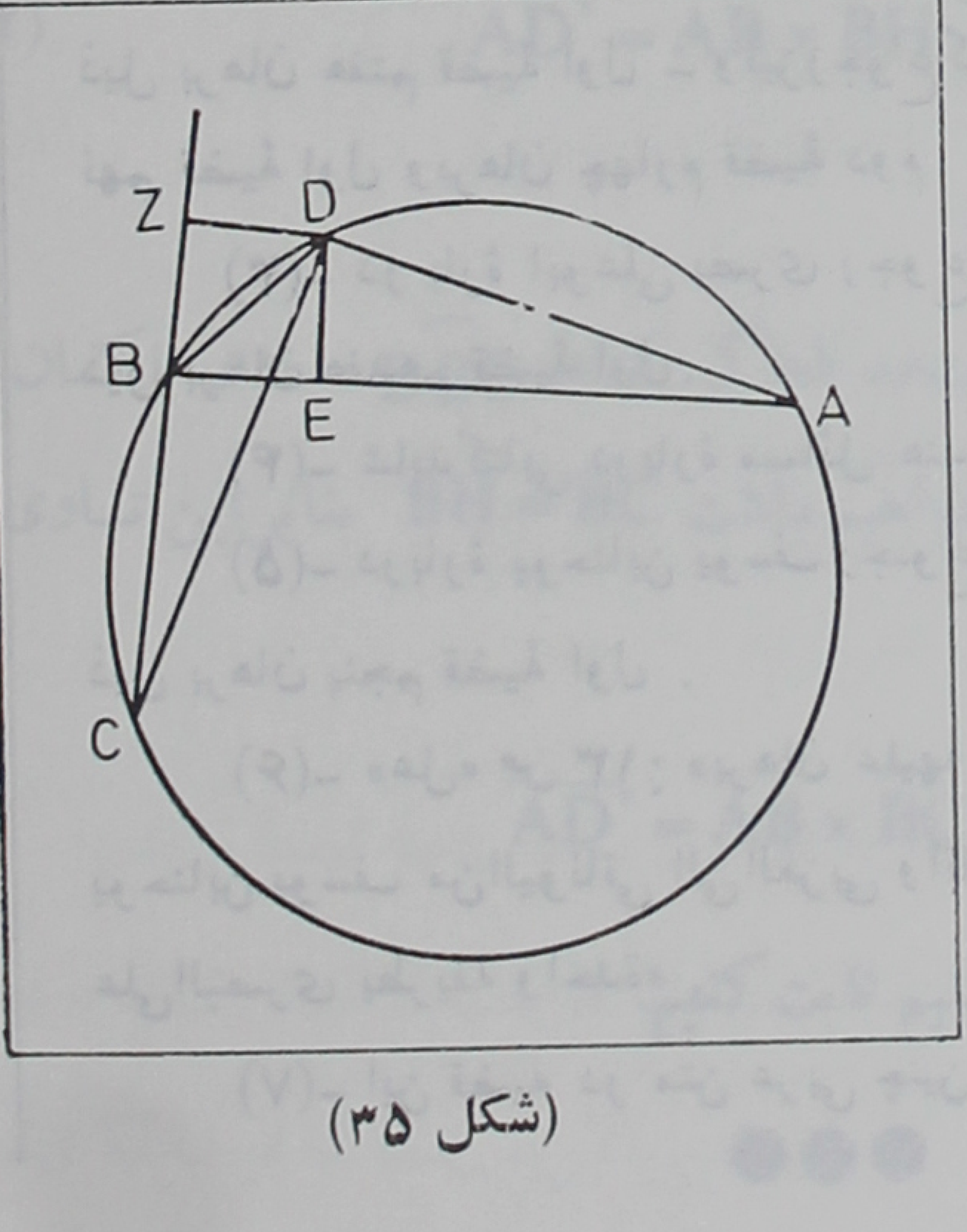
(۹)- دربارهٔ این قضیه رجوع کنید به تبصرهٔ ذیل «عنوان قضیهٔ دوم» (ص ۱۱۲)

(۱۰)- «عل» ص۱۴: «ولذلك صارهذا من اللواحق، واما ابوسعید - السجزی و ابوعلی البصری فجعلا...»

(۱۱)- یادآوری می کنم که استاد ازقضایای اول ودوم هرکدام راکه ثابت شده فرض شود ودربرهان قضیهٔ دیگر ازآن استفاده شود «مقدمه» یا «سابق» نامیده وآن راکه بااستفاده ازقضیهٔ دیگرثابت شود «تابع» یا «لاحق» خوانده است.

(۱۲)- آنچه دربین دو پرانتز نوشته‌ام در متن عربی نیامده و آن را به عنوان توضیح افزوده‌ام.

برهان دوم قضیهٔ دوم(۱) - نخستین برهان(۲) از ابونصر منصور بن علی بن عراق(۳).



(شکل ۳۵)

می‌خواهیم ثابت کنیم که:

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 = AB \times BC + \overline{BD}^2$$

CB را ازطرف B امتداد داده از نقطهٔ D عمود DZ رابرآن فرود می‌آوریم.

همچنین از نقطهٔ D عمود DE را بر AB فرودآورده پاره‌خطهای DB و AD و DC

را رسم می کنیم. چون زاویهٔ ABC محاطی است و اندازهٔ آن مساوی است با نصف همهٔ دایره منهای کمان $\widehat{ADBC}$ پس اندازهٔ زاویهٔ ABZ (که مکمل زاویهٔ ABC است) مساوی‌است با نصف اندازهٔ کمان $\widehat{ADBC}$ و چون کمان $\widehat{AD}$ نصف کمان $\widehat{ADBC}$ است پس خط BD زاویهٔ ABZ را نصف می کند و داریم :

$$\widehat{EBD}(=\widehat{ABD})=\widehat{DBZ}$$

بنابراین دومثلث قائم‌الزاویهٔ DEB و DZB (درحالت وتر و یك زاویهٔ حاده) متساویند. پس :

$$BE=BZ \qquad (۱)$$

(ازاین تساوی بعداً استفاده خواهد شد)

حال گوییم که درمثلث قائم‌الزاویهٔ DZC داریم :

$$\overline{DC}^{۲}=\overline{CZ}^{۲}+\overline{DZ}^{۲} \qquad (۲)$$

ودرمثلث‌قائم‌الزاویهٔ DBZ داریم :

$$\overline{DZ}^{۲}=\overline{BD}^{۲}-\overline{BZ}^{۲} \qquad (۳)$$

ازتساویهای (۲) و (۳) معلوم‌میشود که :

$$\overline{DC}^{۲}=\overline{BD}^{۲}+\overline{CZ}^{۲}-\overline{BZ}^{۲} \qquad (۴)$$

اکنون برای محاسبهٔ $\overline{CZ}^{۲}-\overline{BZ}^{۲}$ ملاحظه می کنیم که :

$$CZ=CB+BZ$$

وچون دوطرف این تساوی را مربع کنیم حاصل می‌شود :

$$\overline{CZ}^{۲} = \overline{CB}^{۲} + \overline{BZ}^{۲} + ۲CB \times BZ$$

وازآنجا :

$$\overline{CZ}^{۲} - \overline{BZ}^{۲} = \overline{CB}^{۲} + ۲CB \times BZ$$

و یا

$$\overline{CZ}^{۲} - \overline{BZ}^{۲} = CB(CB + ۲BZ) \quad (۵)$$

امادرقضیهٔاول ثابت کردیم که $AE = EB + BC$. ازروی‌این‌تساوی‌بادرنظر گرفتن رابطهٔ (۱) معلوم می‌شود :

$$AB = BC + ۲BZ$$

وچون این مقدار را در رابطهٔ (۵) قرار دهیم نتیجه می‌شود :

$$\overline{CZ}^{۲} - \overline{BZ}^{۲} = BC \times AB$$

وبنابراین تساوی (۴) به صورت زیردرمی‌آید :

$$\overline{DC}^{۲} = \overline{BD}^{۲} + BC \times AB$$

واین همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصره – استاد درپایان این برهان افزوده‌است[۴] که :

چون دراین برهان تساوی $AE = EB + BC$ یعنی حکم قضیهٔ اول را بدون برهان پذیرفتیم پس دراینجا قضیهٔدوم از «لواحق» است.(زیرا ازروی قضیهٔ اول ثابت شده‌است)

یادداشتهای مربوط به برهان دوم قضیهٔ دوم :

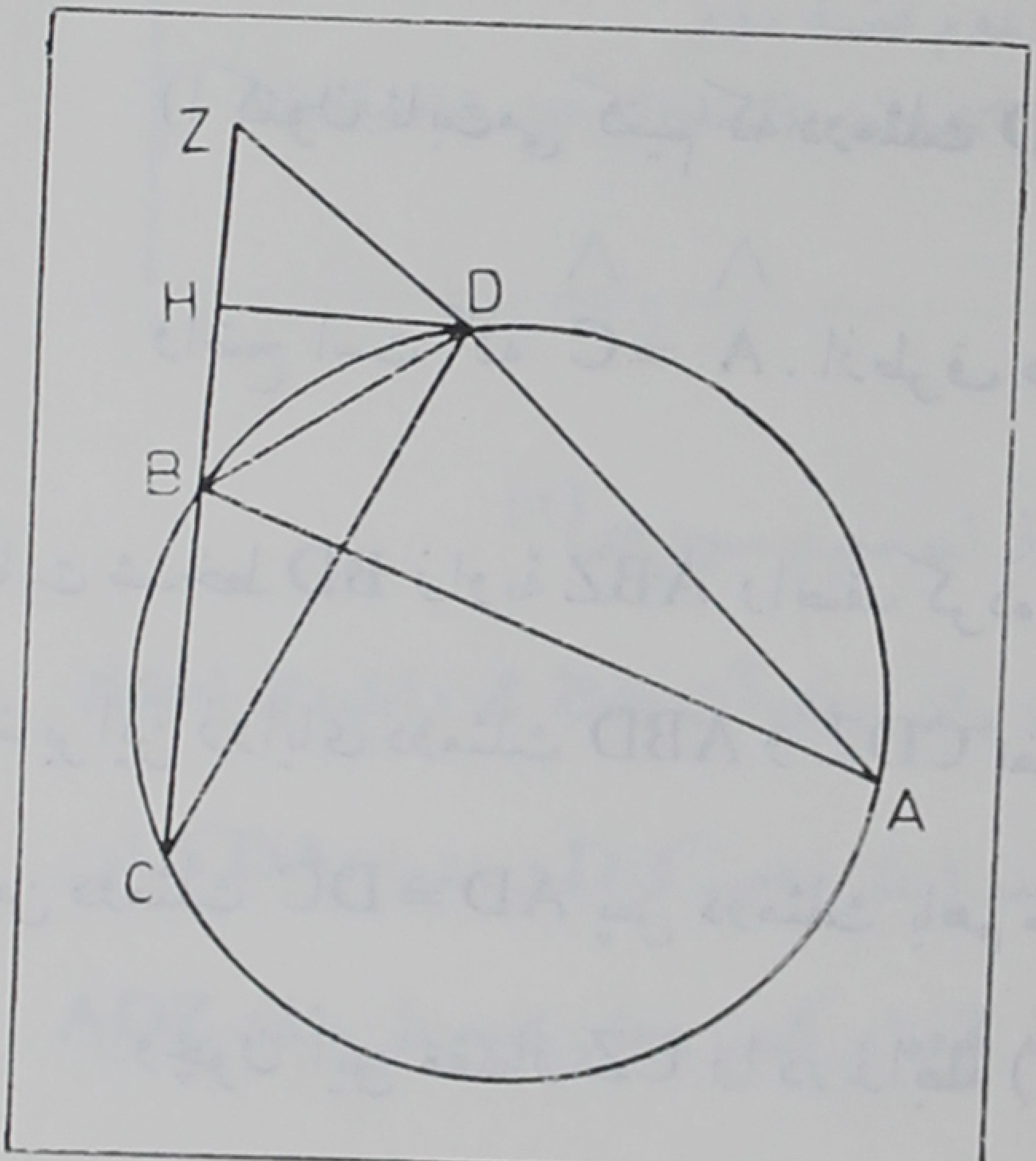
(۱)- عل: ص ۱۴ و ۱۵ - سوتر A : ص ۲۷ و ۲۸ - چد: ص ۳۰ - چم: ص ۶۶ .

(۲)- یك برهان دیگر از ابونصر عراق برای این قضیه به عنوان برهان دوم قضیهٔ دوم خواهد آمد - و نیز رجوع کنید به برهانهای دوازدهم و شانزدهم قضیهٔ اول و برهان سوم قضیهٔ چهارم.

(۳)- دربارهٔ ابونصر عراق رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان دوازدهم قضیهٔ اول - این مطلب جالب توجه است که استاد این برهان را در نسخهٔ «عل» به نام ابونصر منصور بن عراق ثبت کرده و در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» آن را از «ابونصر جعدی» دانسته است. بنابراین تردیدی باقی نمی‌ماند که ابونصر عراق را گاهی نیز ابونصر جعدی می نامیده‌اند.

(۴)- عل: ص ۱۴ و ۱۵ : وهذا من اللواحق لاخذ مساواة اه مجموع هب وبج من غیر برهان

برهان سوم قضیهٔ دوم(۱) - دومین برهان (۲) از ابونصر عراق (= ابو-نصر جعدی) (۳)



(شکل ۳۶)

پاره خط CB را از طرف B امتداد داده عمود DH را بر آن فرود می آوریم و پاره خط HZ را روی امتداد BC مساوی با BH جدا و AD و DB و DC را رسم می کنیم. داریم:

$$\overline{DC}^2 = DH^2 + \overline{HC}^2$$

(از مثلث قائم الزاویه DHC)

و $\overline{DH}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{BH}^2$ (ازمثلث قائم‌الزاویهٔ DHB)

ازدو تساوی فوق نتیجه می‌شود:

$$\overline{DC}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{BH}^2 + (BC + BH)^2$$

$$= \overline{DB}^2 + \overline{BC}^2 + 2BH \times BC$$

و یا

$$\overline{DC}^2 = \overline{DB}^2 + BC\,(BC + 2BH)$$

اما چون $HZ = BH$ پس $BC + 2BH = CZ$

ورابطهٔ (۱) به صورت زیردرمی‌آید:

$$\overline{DC}^2 = \overline{DB}^2 + BC \times CZ \qquad (۲)$$

(اکنون ثابت‌می کنیم که دومثلث ABD و CDZ باهم‌مساوی‌اند).

واضح است که $\hat{A} = \hat{C}$. ازطرف دیگر چنانچه در برهـان اول قضیهٔ دوم ثابت شدخط BD زاویهٔ ABZ رانصف کرده ونیز $\hat{Z} = \widehat{DBH}$ پس $\widehat{ABD} = \widehat{CZD}$ بنابراین زوایای دومثلث ABD و CDZ نظیر به نظیر باهم مساوی‌اند وچون در این دومثلث $AD = DC$ پس دومثلث باهم مساوی‌اند وداریم $AB = CZ$

وچون این مقدار CZ را در رابطهٔ (۲) قراردهیم حاصل می‌شود:

$$\overline{DC}^2 = \overline{DB}^2 + BC \times AB$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصره - استاد در پایان این برهان افزوده است (۴) که :

«چون دراین برهان ازقضیهٔ اول استفاده نکرده‌ایم می‌توان آن را از«سوابق» دانست وقضیهٔ اول را ازروی آن ثابت کرد.»

یادداشتهای مربوط به برهان سوم قضیهٔ دوم :

(۱)- عل: ص ۱۵ - سوتر A : ص ۲۸ - چد: ص ۳۲ و۳۳ - چم: ص ۶۹

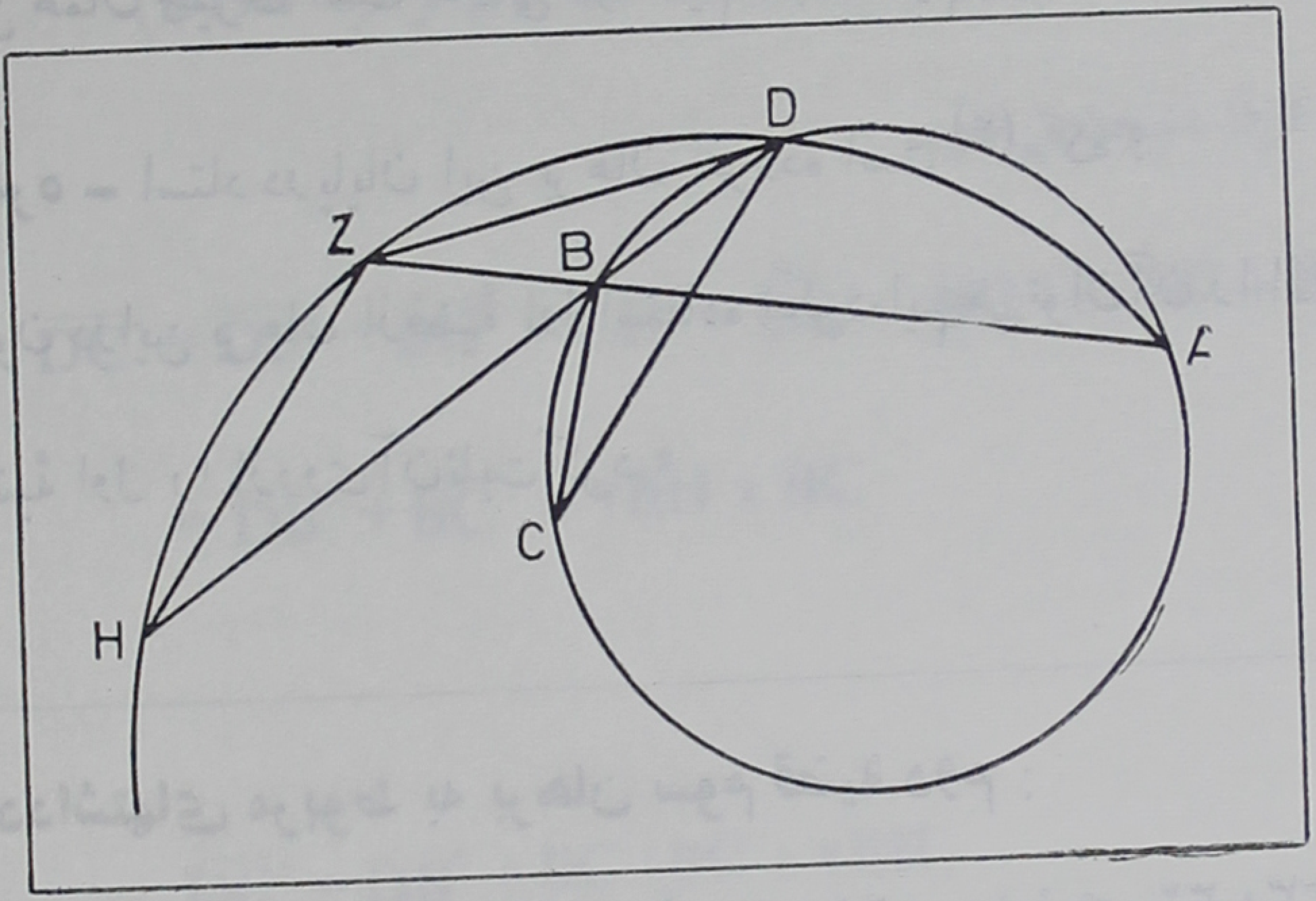
(۲)- یك برهان دیگرازابونصرعراق برای این قضیه به عنوان برهان دوم قضیهٔ دوم گذشت - ونیز رجوع کنید به برهانهای دوازدهم وشانزدهم قضیهٔ اول وبرهان سوم قضیهٔ چهارم.

(۳)- رجوع کنیدبه یادداشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان دوازدهم قضیهٔ اول ویادداشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان دوم قضیهٔ دوم

(۴)- عـل: ص ۱۵: «وهذا من السوابق لاستغنائه عن خاصیة الخط المنحنی ...»

برهان چهارم قضیهٔ دوم (۱) - از ابوسعید سجزی (۲)

پاره خط AB را ازطرف B امتداد داده روی آن نقطهٔ Z را طوری اختیار می کنیم که مثلث ADZ متساوی الساقین باشد. (یعنی به‌مرکز D و به‌شعاع DA کمانی ازدایره رسم می کنیم تاامتداد AB را در نقطهٔ Z قطع کند) ودایرهٔ محیطی مثلث ADZ



(شکل ۳۷)

را رسم می کنیم و DB را امتداد می دهیم تا این دایره را در نقطهٔ H قطع کند و ZH را رسم می کنیم. چون از نقطهٔ B دو قاطع در دایرهٔ بزرگتر رسم شده است (اگر قوت نقطهٔ B را نسبت به دایرهٔ بزرگتر بنویسیم) داریم :

$$AB \times BZ = BD \times BH \qquad (۱)$$

از طرف دیگر می توان نوشت :

$$BH + BD = DH$$

و چون دو طرف این تساوی را در BD ضرب کنیم حاصل می شود :

$$BD \times BH + \overline{BD}^2 = BD \times DH$$

از مقایسهٔ این تساوی با تساوی (۱) حاصل می شود :

$$AB \times BZ + \overline{BD}^2 = BD \times DH \qquad (۲)$$

حال گوییم در دومثلث DBZ و DZH دوزاویهٔ DHZ و DZB متساویند (زیرا هـر دومحاطی و روبه‌روی دو کمان متساوی $\overset{\frown}{ZD}$ و $\overset{\frown}{AD}$ از دایرهٔ بزرگتر هستند) وزاویهٔ ZDB درآنها مشترك است پس این دومثلث متشابه‌اند و داریم :

$$\frac{DH}{DZ} = \frac{DZ}{BD}$$

و ازآنجا :

$$BD \times DH = \overline{DZ}^{۲}$$

چون این مقدار را درتساوی (۲) قراردهیم حاصل می‌شود :

$$AB \times BZ + \overline{BD}^{۲} = \overline{DZ}^{۲}$$

اما ازقضیهٔاول نتیجه می‌شود BZ = BC و می‌دانیم که DZ = AD پس رابطهٔ فوق را می‌توان چنین‌نوشت :

$$AB \times BC + \overline{BD}^{۲} = \overline{AD}^{۲} = \overline{DC}^{۲}$$

واین‌همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصـره ـ استاد درپایان این برهان افزوده‌است(۳) :

«چون دراین‌برهان تساوی BZ = BC را دانسته‌فرض کردیم (یعنی‌درواقع از قضیهٔاول استفاده کردیم) پس دراینجا قضیهٔدوم از «لواحق» است. اما اگرمانند قبل ابتدا قضیهٔدوم را (از راه دیگری) ثابت کنیم و سپس ازآن قضیهٔاول را نتیجه بگیریم دراین‌صورت قضیهٔدوم از «سوابق» خواهدشد(۴).

یادداشتهای مربوط به برهان چهارم قضیهٔ دوم :

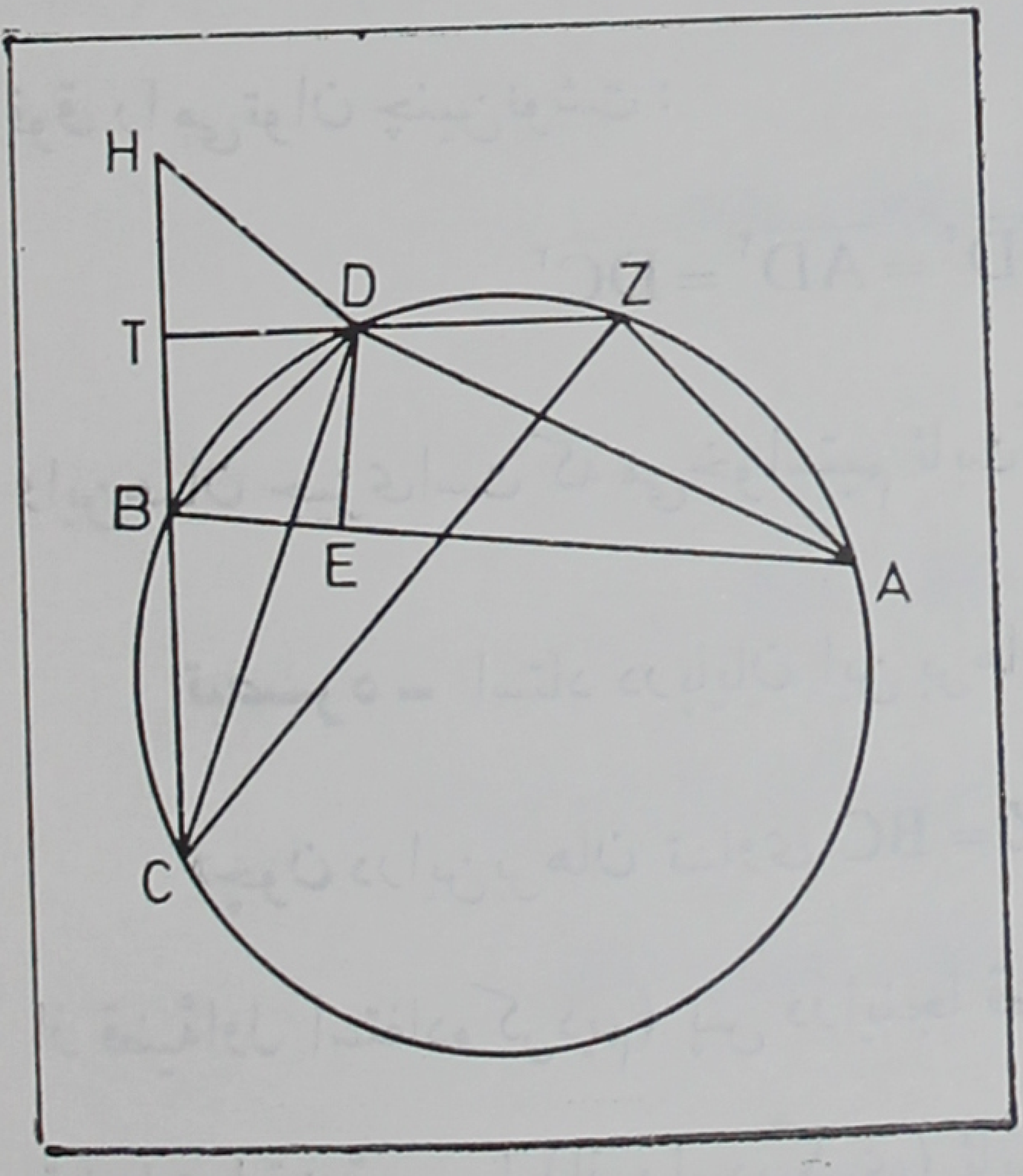
(۱)- عل: ص ۱۵- سوتر A : ص ۲۸ و ۲۹ - چد: ص ۳۱-چم: ص ۶۷ و ۶۸

(۲)- دربارهٔ ابوسعید سجزی رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان هفتم قضیهٔ اول - ونیز رجوع کنید به برهانهای هفتم وهشتم و نهم قضیهٔاول وبرهان اول قضیهٔ دوم.

(۳)- عل: ص ۱۵: «وهومن اللواحق مادام یوجدفیه مساواة بز ل بج مسلماً . فاما اذابرهن بمثل ماتقدم، ثم نسلق منه الی خاصیة الخط المنحنی کان حینئذ من السوابق.»

(۴)- رجوع کنیدبه تبصرهٔ ۲ ذیل برهان پنجم قضیهٔ دوم (صفحهٔ ۱۲۸). درآنجا چگونگی این امربیان شده است.

برهان پنجم قضیهٔ دوم(۱)- ازابوعبدالله الشنّی (۲).



(شکل ۳۸)

از کمان $\widehat{AB}$ کمان $\widehat{AZ}$ را مساوی با کمان $\widehat{BC}$ جدا کرده وتر CZ رارسم می کنیم. (واضح است که چون نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$ است $\widehat{BD}=\widehat{DZ}$) سپس CB را ازطرف B امتداد داده روی آن CH را مساوی با CZ جدا می کنیم. وپاره‌خطهای DC و DH و DA و DB و DZ را رسم می کنیم.

چون در دومثلث DHC و DZC دوضلع CH و CZ متساوی وضلع DC مشترک است و دوزاویهٔ HCD و ZCD متساویند، زیرامحاطی وروبه‌روی دو کمان متساوی $\widehat{BD}$ و $\widehat{DZ}$ هستند دو مثلث مذکور متساویند و بنابراین DH = DZ و چون DZ = DB پس DH = DB یعنی مثلث DHB متساوی‌الساقین است. پس اگر از نقطهٔ D عمود DT را بر BH فرودآوریم واضح‌است که نقطهٔ T وسط پاره‌خط BH است.

اکنون می گوییم که پاره‌خط BH در نقطهٔ T نصف شده و نقطهٔ C در امتداد آن قرار دارد. پس (بنا به قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس»[۳]) داریم :

$$HC \times BC + \overline{BT}^{2} = \overline{CT}^{2} \qquad (1)$$

و چون به دوطرف این تساوی مقدار $\overline{TD}^{2}$ را بیفزائیم حاصل می‌شود :

$$HC \times BC + \overline{BT}^{2} + \overline{TD}^{2} = \overline{CT}^{2} + \overline{TD}^{2} \qquad (2)$$

اما $\overline{BT}^{2} + \overline{TD}^{2} = \overline{BD}^{2}$ (ازمثلث قائم‌الزاویهٔ BTD) و $\overline{CT}^{2} + \overline{TD}^{2} = \overline{CD}^{2}$ (از مثلث قائم‌الزاویهٔ CTD) پس تساوی (۲) به صورت زیردرمی‌آید :

$$HC \times BC + \overline{BD}^{2} = \overline{CD}^{2}$$

اما از روی شکل واضح است که AB = HC پس داریم :

$$AB \times BC + \overline{BD}^{2} = \overline{CD}^{2}$$

و این‌همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصرهٔ ۱- استاد در پایان این‌برهان افزوده‌است[۴] :

«چون دراین برهان ازقضیهٔ‌اول استفاده نکرده‌ایم در اینجا می‌توان قضیهٔ‌دوم

را از «سوابق» محسوب داشت.

تبصرهٔ ۲- (اثبات قضیهٔ اول از روی قضیهٔ دوم توسط ابوعبدالله الشنّی)

استاد یك برهان دیگر(۵) از ابوعبدالله الشنّی برای قضیهٔ اول ذکر کرده است(۶) که قسمت اول آن عیناً مانند برهان فوق است و اینك برای مزید فایده بقیهٔ آن را در اینجا نقل می کنم.

ابوعبدالله الشنّی خواسته است که قضیهٔ اول را از قضیهٔ دوم نتیجه بگیرد.

به این ترتیب:

پس از آنکه درستی تساوی زیر

$$AB \times BC + \overline{BD}^{2} = \overline{CD}^{2} = \overline{AD}^{2} \qquad (۳)$$

یعنی حکم قضیهٔ دوم (بدون استفاده از قضیهٔ اول) ثابت شد از نقطهٔ D عمود DE را بر AB فرود آورده ملاحظه می کنیم که:

$$\overline{BD}^{2} = \overline{BE}^{2} + \overline{ED}^{2}$$ (از مثلث قائم الزاویهٔ BDE)

و

$$\overline{AD}^{2} = \overline{DE}^{2} + \overline{AE}^{2}$$ (از مثلث قائم الزاویهٔ ADE)

پس رابطهٔ (۳) را می توان چنین نوشت:

$$AB \times BC + \overline{BE}^{2} + \overline{ED}^{2} = \overline{DE}^{2} + \overline{AE}^{2}$$

وچون $\overline{DE}^{2}$ را از دو طرف رابطهٔ فوق کم کنیم حاصل می‌شود:

$$AB \times BC + \overline{BE}^{2} = \overline{AE}^{2} \qquad (۴)$$

بنا بر این مجموع دو پاره خط AB و BC (نظر به عکس قضیهٔ پنجم از مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس»(۷)) در نقطهٔ E نصف می‌شود.

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم(۸).

یادداشتهای مربوط به برهان پنجم قضیهٔ دوم:

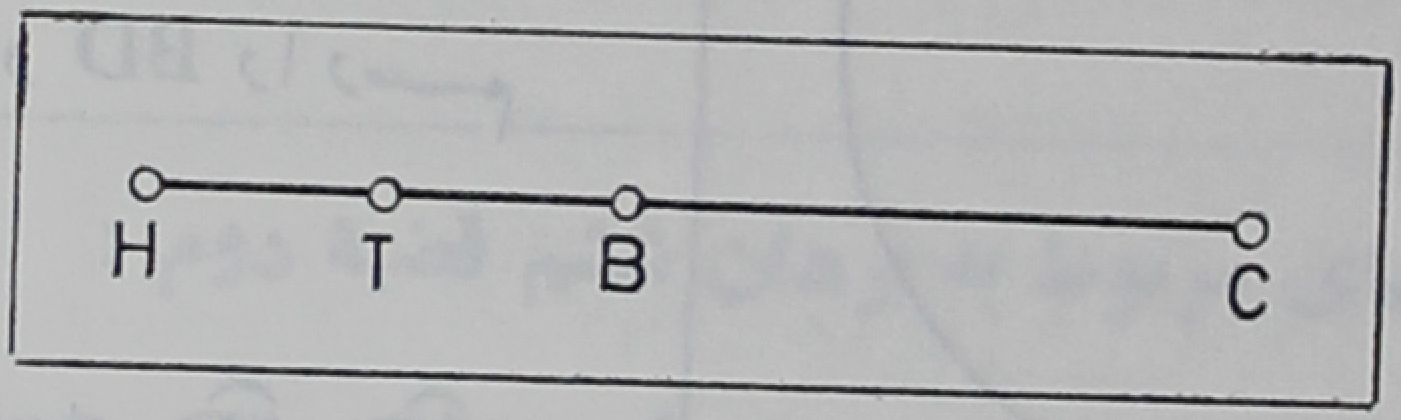
(۱)- عل: ص ۱۶ - سوتر A: ص ۲۹ - چد: ص۳۳ و ۳۴ - چم: ص ۷۰

(۲)- دربارهٔ ابوعبدالله الشّنّی رجوع کنید به «بیرونی‌نامه» ص ۵۳۰- ونیز رجوع کنید به برهانهای سیزدهم و پانزدهم قضیهٔ اول و برهان چهارم قضیهٔ چهارم.

(۳)- قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس» را می‌توان به صورت سادهٔ زیر بیان کرد:

اگر نقطهٔ T وسط پاره خط BH باشد و BH را از طرف B به طول دلخواه BC امتداد دهیم رابطه زیر برقرار است:

$$CH.CB + \overline{BT}^{2} = \overline{CT}^{2}$$



(شکل ۳۹)

(رجوع کنید به «هیث E» ج ۱ ص ۳۸۵ به بعد. درآنجا بحث جالب توجهی دربارهٔ این قضیه ونتایج آن خواهید یافت - ونیز رجوع کنید به «تحریر اقلیدس» ص ۳۹)

(۴)- وهذا من السوابق لاستغنائه عن تلك الخاصية.

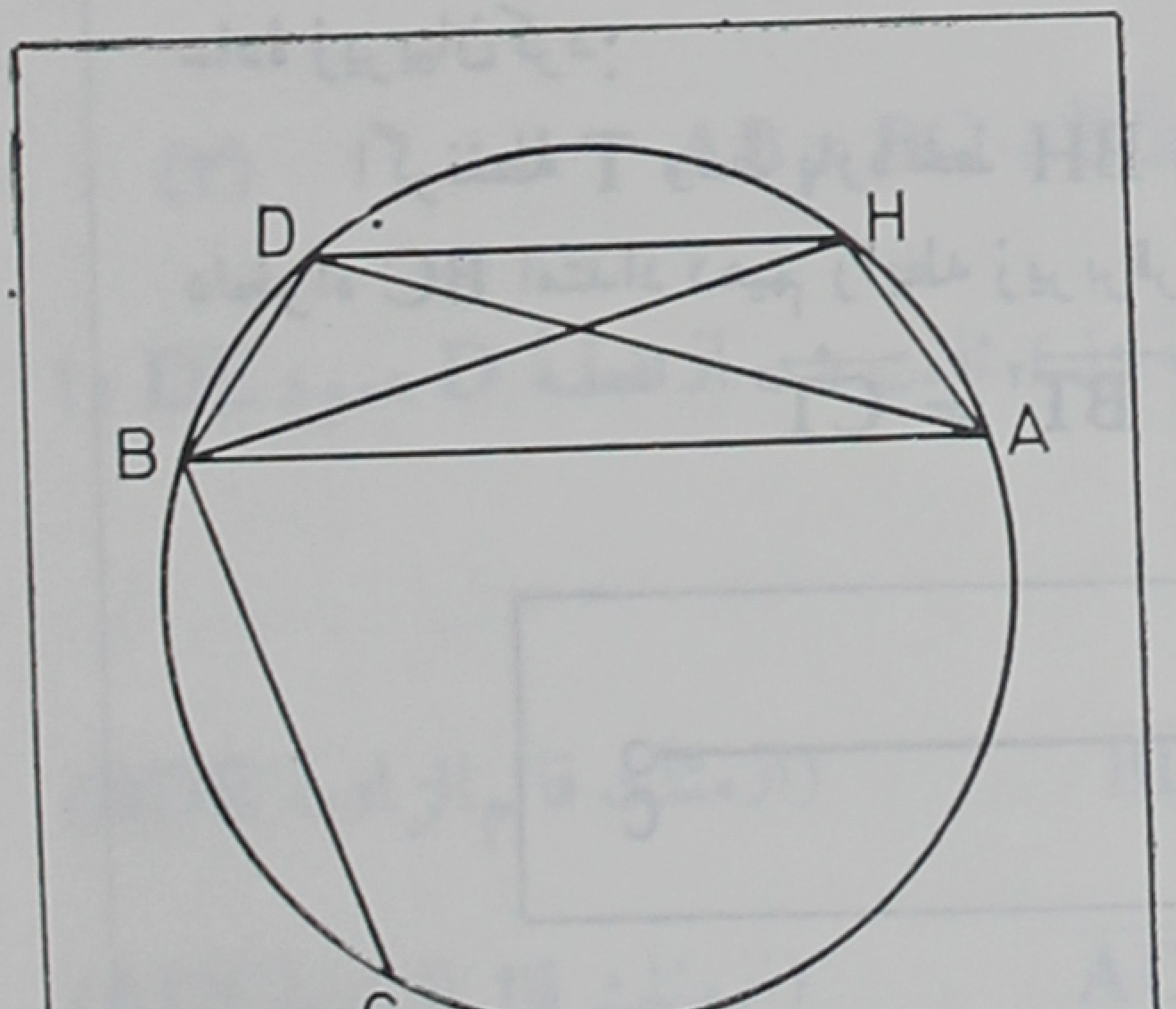
(۵)- دو برهان دیگر از ابوعبدالله الشّنّی برای قضیهٔ اول به عنوان برهانهای سیزدهم و پانزدهم آن قضیه گذشت.

(۶)- عل: ص ۸ - سوتر A : ص ۱۹ - این برهان در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» به صورت کامل نیامده است.

(۷)- دربارهٔ قضیهٔ پنجم مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس» رجوع کنید به تبصرهٔ ذیل عنوان قضیهٔ دوم (صفحه ۱۱۲)

(۸)- ابوعبدالله الشنی بدون ذکر دلیل از تساوی (۴) نتیجه گرفته است که مجموع دو پاره خط AB و BC در نقطهٔ E نصف می‌شود و برای این مطلب دلیلی ذکر نکرده است. شاید دلیلش همان طور که در متن نوشتم عکس قضیهٔ پنجم مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس» بوده‌است. اما عکس این قضیه در کتاب «اصول اقلیدس» ثابت نشده است!

برهان ششم قضیهٔ دوم(۱)- نخستین برهان(۲) از استاد بیرونی.



(شکل ۴۰)

از نقطهٔ D وسط کمان ABC وتر DH را به موازات AB می کشیم و پاره‌خطهای AH و AD و BH و BD را رسم می کنیم.

چون کمانهای $\widehat{AD}$ و $\widehat{DC}$ باهم و کمانهای $\widehat{AH}$ و $\widehat{BD}$ نیز باهم مساویند داریم : $\widehat{DH} = \widehat{BC}$. بنابراین وترهای DH و BC باهم مساویند.

چون چهارضلعی AHDB در دایره محاط است (نظر به قضیهٔ بطلمیوس(۳)) داریم :

$$AD \times BH = DH \times AB + AH \times BD$$

اما $AD = BH$ و $AH = BD$ و $DH = BC$ بنا براین :

$$\overline{AD}^2 = AB \times BC + \overline{BD}^2$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصرهٔ ۱- در پایان این برهان استاد افزوده است[۴] : «چون در این برهان از قضیهٔ اول استفاده نکرده‌ایم این نیز جزو «سوابق» است (یعنی مانعی ندارد که از آن برای اثبات قضیهٔ اول استفاده کنیم)».

تبصرهٔ ۲- این برهان که از استاد است ساده‌ترین برهانهایی است که در کتاب «استخراج الاوتار» برای قضیهٔ دوم بیان‌شده است. با این حال معلوم نشد که چرا استاد در کتاب «قانون مسعودی» که بنای آن بر اختصار بوده برهان دیگری برای این قضیه ذکر کرده که از برهان فوق مفصلتر است. (رجوع کنید به «بیرونی‌نامه» صفحات ۲۸۸ تا ۲۹۰).

یادداشتهای مربوط به برهان ششم قضیهٔ دوم :

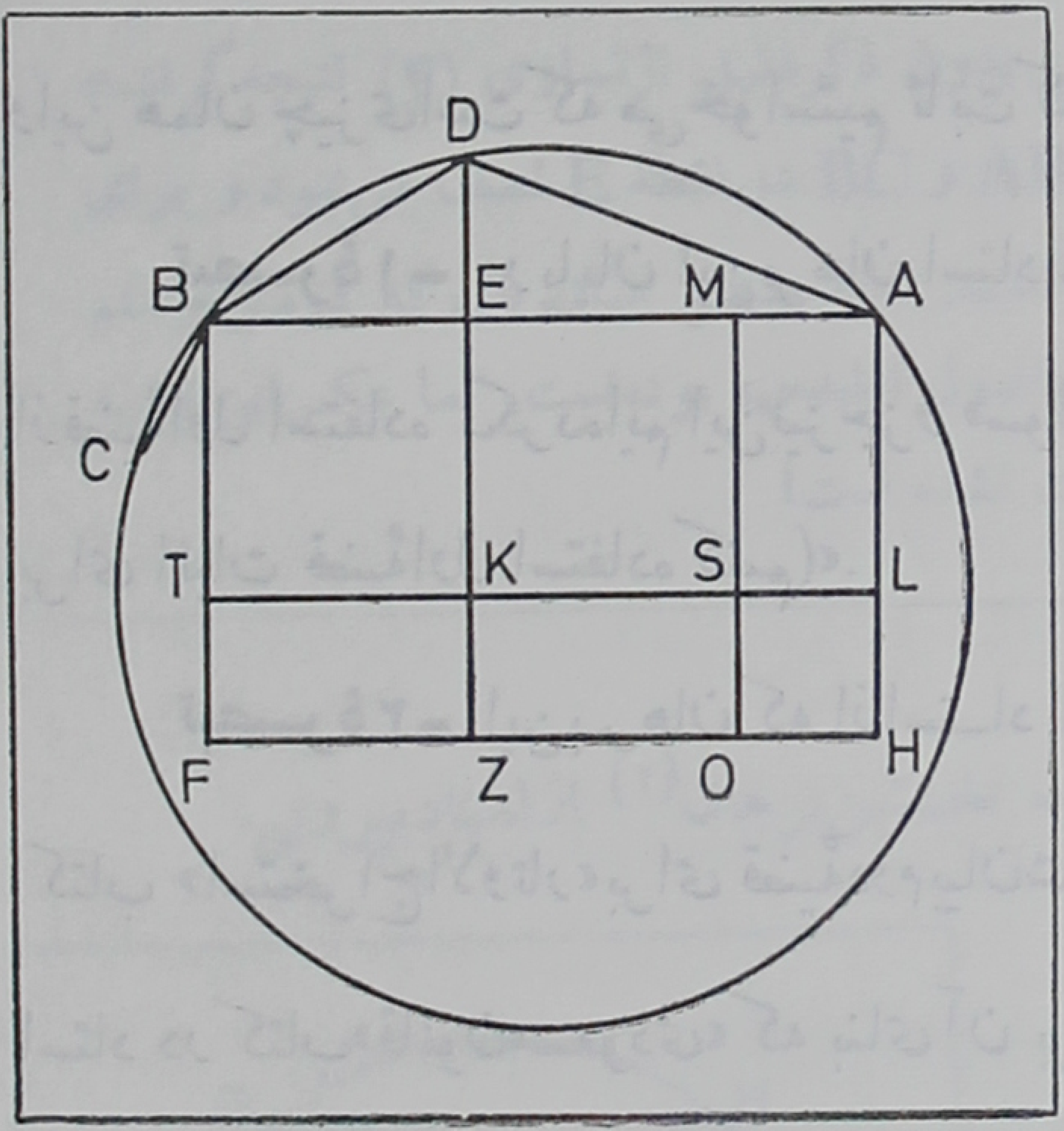
(۱)- عل: ص ۱۶ - سوتر A : ص ۲۹ و ۳۰ - چد: ص ۳۴ (سطر پنجم به بعد) - چم: ص ۷۳ (سطر چهارم به بعد)

(۲)- سه برهان دیگر برای قضیهٔ دوم از استاد به عنوان برهانهای هفتم تا نهم خواهد آمد - علاوه بر این استاد برهان دیگری برای این قضیه در کتاب «قانون مسعودی» ذکر کرده است (رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحات ۲۸۸ تا ۲۹۰)

(۳)- عنوان قضیهٔ بطلمیوس این است: «در هر چهارضلعی محدب محاطی حاصل ضرب دو قطر مساوی است با مجموع حاصل ضربهای اضلاع متقابل.

(رجوع کنید به «نه مقالهٔ هندسه» بخش اول صفحهٔ ۱۹۲ به بعد)
(۴)- عل : ص ۱۶ : «وهذا ایضامن السوابق»

برهان هفتم قضیهٔ دوم(۱) - دومین برهان از استاد بیرونی (۲).



(شکل ۴۱)

از نقطهٔ D (وسط کمان $\widehat{ABC}$) عمود DE را بر AB فرودمی آوریم. وروی AE مربع AEZH را بنا می کنیم. و نیز روی BE مربع BEKT را می‌سازیم. و TK را امتدادمی‌دهیم تا AH را درنقطهٔ L قطع کند. و روی EA پاره خط EM را مساوی با EB جدا کرده از M خطی به موازات EZ رسم می کنیم تا KL را در نقطهٔ S و ZH را درنقطهٔ O قطع کند ومستطیل ABFH را کامل می کنیم.

نظر به قضیهٔاول واضح‌است که $AM = BC$ (زیرا E وسط خط شکستهٔ ABC است و $EM = EB$).

(در اینجا استدلال را کمی خلاصه کرده‌ام) و با درنظر گرفتن دومربع AEZH و $EBTK = MEKS$ واضح‌است که $AM = KZ = TF$ و

مساحت مستطیل TFHL = مساحت مربع AEZH − مساحت مربع BTKE

یعنی : $LT \times TF = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$

وچون $LT = AB$ و دیدیم که $TF = AM = BC$ پس رابطهٔ فوق را می‌توان چنین نوشت :

$$AB \times BC = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$$

اگر به دوطرف این تساوی مقدار $\overline{BD}^2$ را بیفزاییم حاصل می‌شود :

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{BE}^2 \qquad (۱)$$

اما $\overline{BD}^2 - \overline{BE}^2 = \overline{ED}^2$ (از مثلث قائم‌الزاویهٔ EBD)

پس رابطهٔ (۱) چنین نوشته می‌شود :

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 \qquad (۲)$$

ازطرف دیگر $\overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 = \overline{AD}^2$ (ازمثلث قائم‌الزاویهٔ EAD)

پس تساوی (۲) به صورت زیر درمی‌آید :

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$$

و این‌همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصره – استاد درپایان این برهان افزوده‌است : «چون در این استدلال ازقضیهٔ‌اول استفاده کرده‌ایم این برهان جزو «لواحق»است»[۳].

یادداشتهای مربوط به برهان هفتم‌قضیهٔ دوم :

(۱)- عل: ص ۱۶و۱۷ - سوتر A : ص ۳۰ - چد: ص ۲۹ و۳۰ چم: ص ۶۴ و۶۵

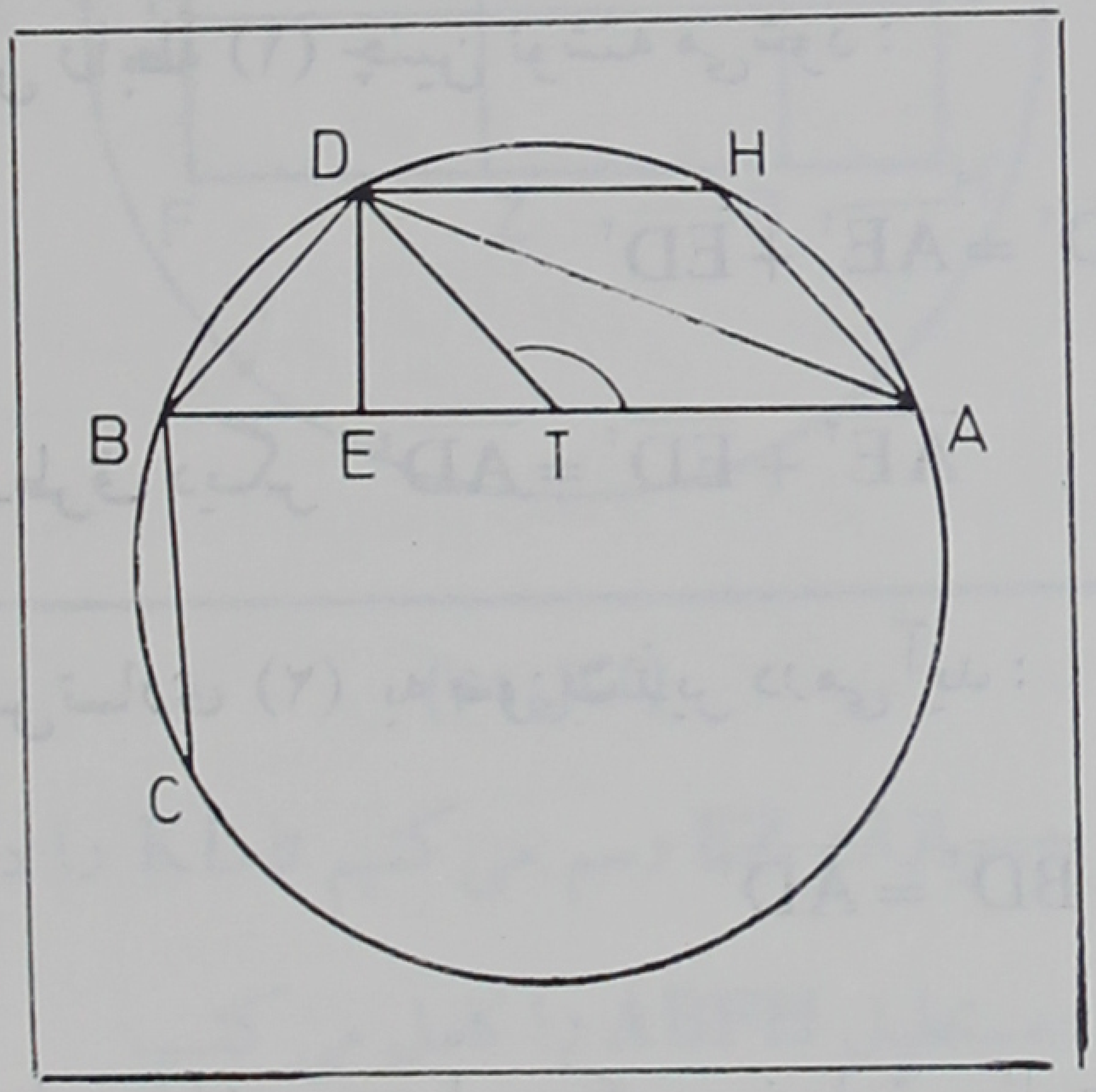
(۲)- درنسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» درآغازاین برهان‌آمده

است: «ویجوزان نبرهنها بطریق السطوح الواقعة تحت الحس» مقصود این است که می‌توان این قضیه را ازروی مساحت شکل‌ها که محسوس تر است ثابت کرد.

(۳)- عل: ص۱۷ : «وهذا من اللواحق لاضطراره الی تلک الخاصیة»

برهان هشتم قضیهٔ دوم(۱) - سومین برهان از استاد بیرونی

استاد در آغاز این برهان نوشته است(۲) : «سومین برهان از من بدون احالهٔ آن به کتاب مجسطی(۳)».



(شکل ۴۲)

(از نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$) عمود DE را بر AB فرود آورده AD را وصل می‌کنیم و از نقطهٔ D وتر DH را به موازات AB و DT را به موازات AH رسم می‌کنیم. واضح است که $DT = AH = BD$

زاویهٔ DTA منفرجه است و (درمثلث ADT نظر به قضیهٔ مربوط به مربع ضلع مقابل به زاویهٔ منفرجه) داریم:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AT}^2 + \overline{DT}^2 + AT \times BT \qquad (۱)$$

(زیرا $BT = 2ET$) . اما:

$$\overline{AT}^2 + AT \times BT = AT(AT + BT) = AT \times AB$$

پس رابطهٔ (۱) را می‌توان چنین نوشت :

$$\overline{AD}^{2} = \overline{DT}^{2} + AB \times AT = \overline{BD}^{2} + AB \times AT \qquad (۲)$$

ازطرف دیگر $AT = HD$ و $HD = BC$ است و $BE = ET$ بنا براین تساوی (۲) به صورت زیر درمی‌آید :

$$\overline{AD}^{2} = \overline{BD}^{2} + AB \times BC$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصره - درپایان این برهان استاد افزوده‌است : «وهذامن السوابق» یعنی چون در برهان فوق ازقضیهٔ اول استفاده نکرده‌ایم مانعی ندارد که برای قضیهٔ اول ازآن استفاده کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان هشتم قضیهٔ دوم :

(۱)- عل: ص ۱۷ - سوتر A: ص ۳۰و۳۱ ونیزصفحات ۶۸و۶۹- چد: ص ۳۵ - چم : ص ۷۳

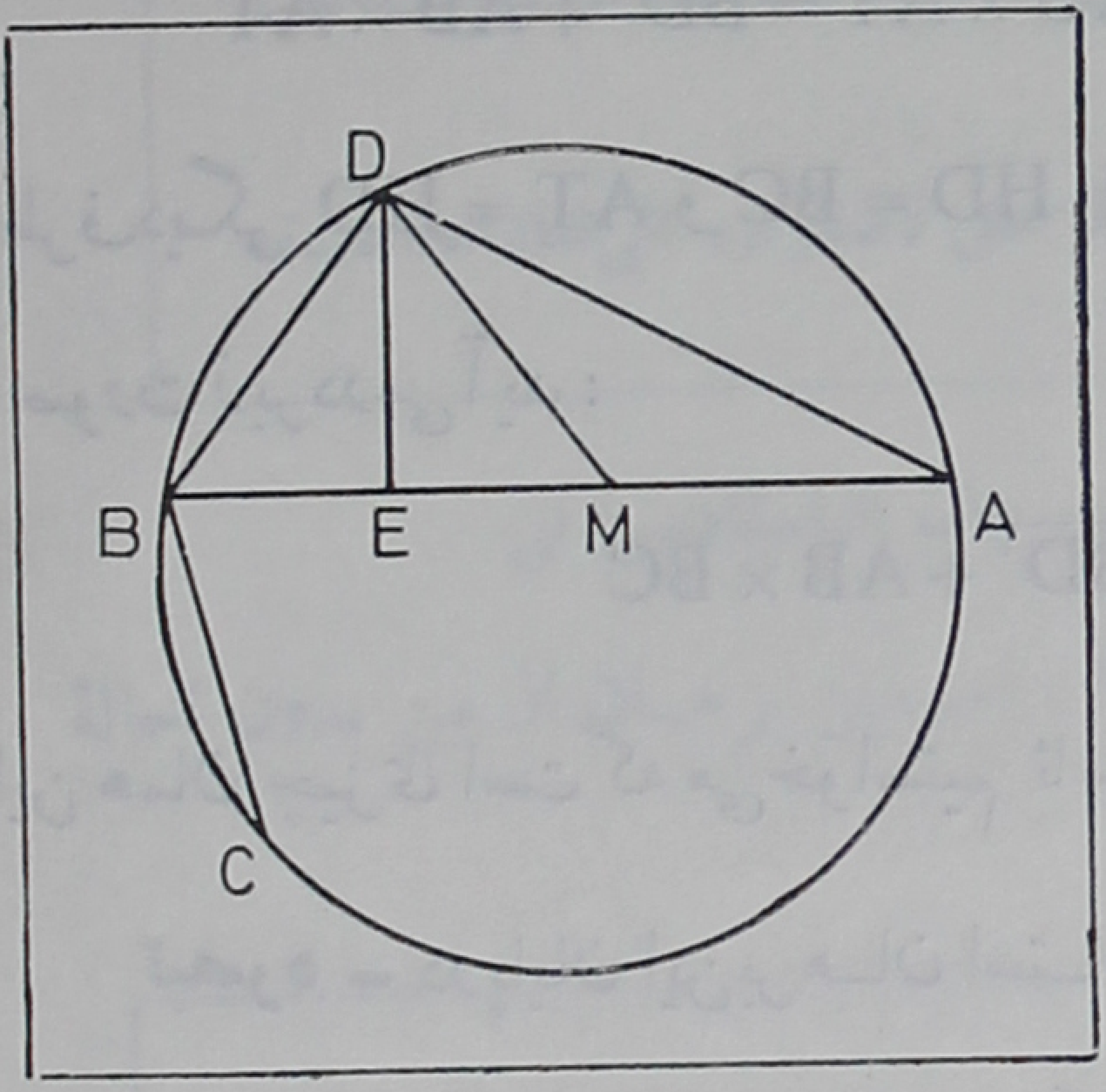
(۲)- عل : ص ۱۷ : « برهان ثالث لی علیها من غیر احالة علی المجسطی» - چد: ص ۳۵: «وقلت فی‌موضع آخر غیراحالة‌علی کتاب المجسطی»

(۳)- سوتر نوشته است (سوتر A : ص ۶۹) که معنی جملهٔ «من غیراحالة علی‌المجسطی» روشن نیست.

من‌تصورمی‌کنم‌که چون‌استاد برهان اول خود را با استفاده ازقضیهٔ بطلمیوس‌که درکتاب مجسطی‌آمده بیان‌کرده است می‌خواهد بگوید که در اینجا همین قضیه را بدون استفاده ازکتاب مجسطی یعنی بدون به‌کاربردن قضیهٔ بطلمیوس ثابت می‌کند. ودلیل قاطع این امراین است‌که درکتابهای استخراج‌الاوتارچاپی این برهان بلافاصله بعداز برهان اول که وابسته به قضیه بطلمیوس است‌آمده .

برهان نهم قضیهٔ دوم(۱) ـ چهارمین برهان از استاد بیرونی.

عمود DE را از نقطهٔ D (وسط کمان $\widehat{ABC}$) بر AB فرود آورده EM را روی EA مساوی با EB جدا می کنیم. به این ترتیب نقطهٔ E وسط پاره خط MB است و چون نقطهٔ A در امتداد BM واقع است (نظر به قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس(۲)») داریم :



(شکل۴۳)

$$AB \times AM + \overline{EM}^2 = \overline{AE}^2$$

چون به دوطرف این تساوی مقدار $\overline{DE}^2$ را بیفزاییم حاصل می‌شود :

$$AB \times AM + \overline{EM}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 \qquad (1)$$

اما درمثلثهای قائم‌الزاویهٔ DEB و AED داریم :

$$\overline{DE}^2 + \overline{EM}^2 \,(= \overline{EB}^2) = \overline{BD}^2 \quad \text{و} \quad \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AD}^2$$

پس رابطهٔ (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$AB \times AM + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 \qquad (2)$$

ازطرف دیگر درقضیهٔ اول ثابت شد که $AM = BC$ پس تساوی (۲) را می‌توان

چنین نوشت(۳) :

$$AB \times BC + \overline{BD}^{2} = \overline{AD}^{2}$$

واین همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

تبصره – در پایان این برهان استاد افزوده است : «وهذا ایضا من اللواحق لما – کر رناذ کره» یعنی به همان دلیل که چند بار گفته‌ایم این برهان نیز از «لواحق» است (زیرا در آن از قضیهٔ اول استفاده شده است) .

یادداشتهای مربوط به برهان نهم قضیهٔ دوم :

(۱)- عل: ص۱۷ - سوتر A : ص **۳۱** - چد: قسمت آخر ص **۲۶** وقسمت اول صفحهٔ **۲۷** - چم: ص **۶۱**، سطر چهارم به بعد.

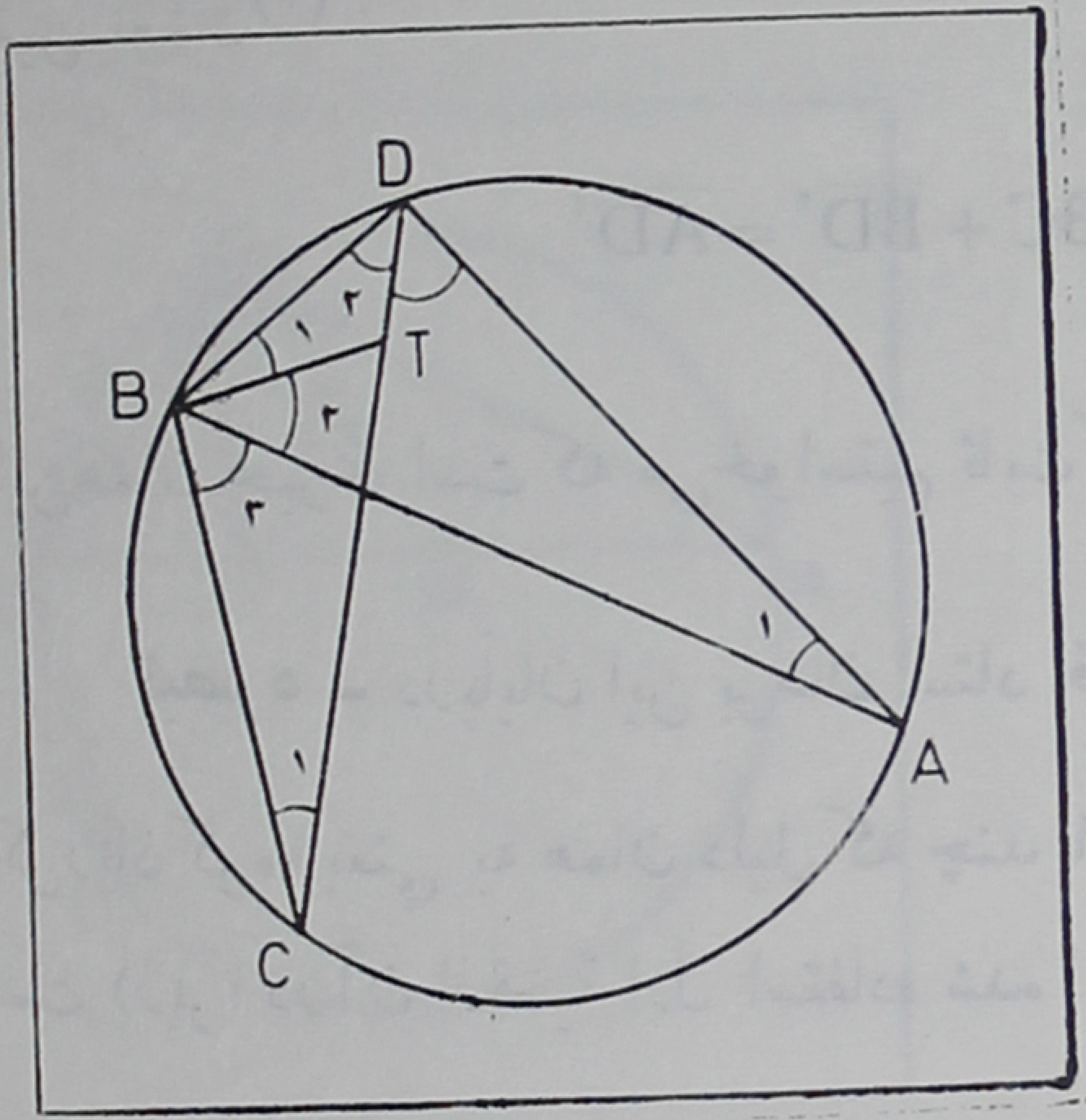
(۲)- دربارهٔ قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس» رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (**۳**) ذیل برهان پنجم قضیهٔ دوم .

(**۳**)- ظاهراً در نسخهٔ خطی «عل» عبارت سطر سوم از آخر صفحهٔ **۱۷** افتادگی دارد و باید چنین تصحیح شود (و گرنه برهان ناقص خواهد بود):

«و **اد** یقوی علی **اه** و **هد** فضرب **ب** فی **ام** (اعنی **ب ج**) ومربع...»

برهان دهم قضیهٔ دوم(۱) – از ابوالحسن بن بامشادقاینی(۲).

(این برهان در نسخهٔ خطی «عل» نیامده ولی در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» دیده می‌شود(۳)) .



(شکل ۴۴)

از نقطهٔ B خط BT را (مطابق با شکل) طوری رسم می کنیم که زاویهٔ $\widehat{B_1} = \widehat{DBT}$ مساوی با زاویهٔ C_1 شود. دراین صورت واضح است که دو مثلث DCB و DBT که دارای یک زاویهٔ مشترك .(دررأس D) و دوزاویهٔ متساوی هستند متشابهند و داریم $\frac{CD}{DB} = \frac{BD}{TD}$ و ازآنجا :

$$\overline{BD}^2 = CD \times TD \qquad (1)$$

اکنون می گوییم مجموع دوزاویهٔ D_2 و C_1 که هردومحاطی وروبه روی کمانهای $\widehat{CB}$ و $\widehat{BD}$ هستند مساوی است با زاویهٔ ABD که محاطی وروبه روی کمان $\widehat{AD}$ است (زیرا $\widehat{AD} = \widehat{DBC}$) یعنی داریم :

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{C}_1 + \hat{D}_2$$

و چون $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$ پس $\hat{B}_2 = \hat{D}_2 \qquad (2)$

از طرف دیگر $\hat{B}_3 = \hat{D}_3$ (D_3 یعنی $\widehat{ADC}$) $\qquad (3)$

زیرا هردو محاطی و روبه روی کمان $\widehat{AD}$ هستند . از جمع دو تساوی (۲) و (۳)

عضو به عضو حاصل می‌شود $\hat{B}_2 + \hat{B}_3 = \hat{D}_2 + \hat{D}_3$

یعنی $C\hat{B}T = A\hat{D}B$

و چون $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (هردومحاطی و روبه‌روی یك کمان هستند) پس دومثلث ADB و CBT متشابه‌اند و داریم $\frac{AB}{CT} = \frac{AD}{BC}$ یعنی

$$AB \times BC = AD \times CT \quad (4)$$

اکنون دوتساوی (۱) و (۴) را عضو به عضو با هم‌جمع می کنیم حاصل می‌شود :

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = AD \times CT + CD \times TD$$

ویا بادرنظر گرفتن اینکه $CD = AD$:

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = CD(CT + TD)$$

و یا

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان دهم قضیهٔ دوم :

(۱)- چد: ص ۳۷ - چم : ص ۷۵

(۲)- ابوالحسن علی بن عبدالله‌بن محمد. بامشادقاینی ازریاضی‌دانان ومنجمان ایرانی بودکه درزمان بیرونی ویا شاید پیش‌از وی می‌زیست. از وی دومقاله دردست است (رجوع کنیدبه مقاله «قربانی: ابوالحسن بن‌بامشاد قاینی» - یك برهان نیز از ابوالحسن بامشاد برای قضیهٔ سوم خواهد آمد

(برهان اول قضیه سوم)

(۳)- برای آنکه بیان استدلال روشنتر باشد بدون آنکه در آن تغییری بدهم مطالب آن را کمی پس و پیش کرده‌ام.

برهانهای یازدهم و دوازدهم قضیهٔ دوم - یك برهان دیگر برای قضیهٔ دوم از استاد بیرونی در کتاب «قانون مسعودی» ذکر شده است (رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحات ۲۸۸ تا ۲۹۰).

درنسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (چد: ص۳۸ - چم: ص۷۶) یك برهان از ابوالحسن بصری برای قضیهٔ دوم آمده است که چون مفصل و نارسا است از ذکر آن صرف نظر می کنم و یك مطلب هم از سلیمان بن عصمة سمرقندی ذکر شده (چد: ص۳۶ - چم: ص۷۴) که الحاقی به نظر می آید. (در بارهٔ سلیمان بن عصمة رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحات ۵۳۸ و ۵۳۹).

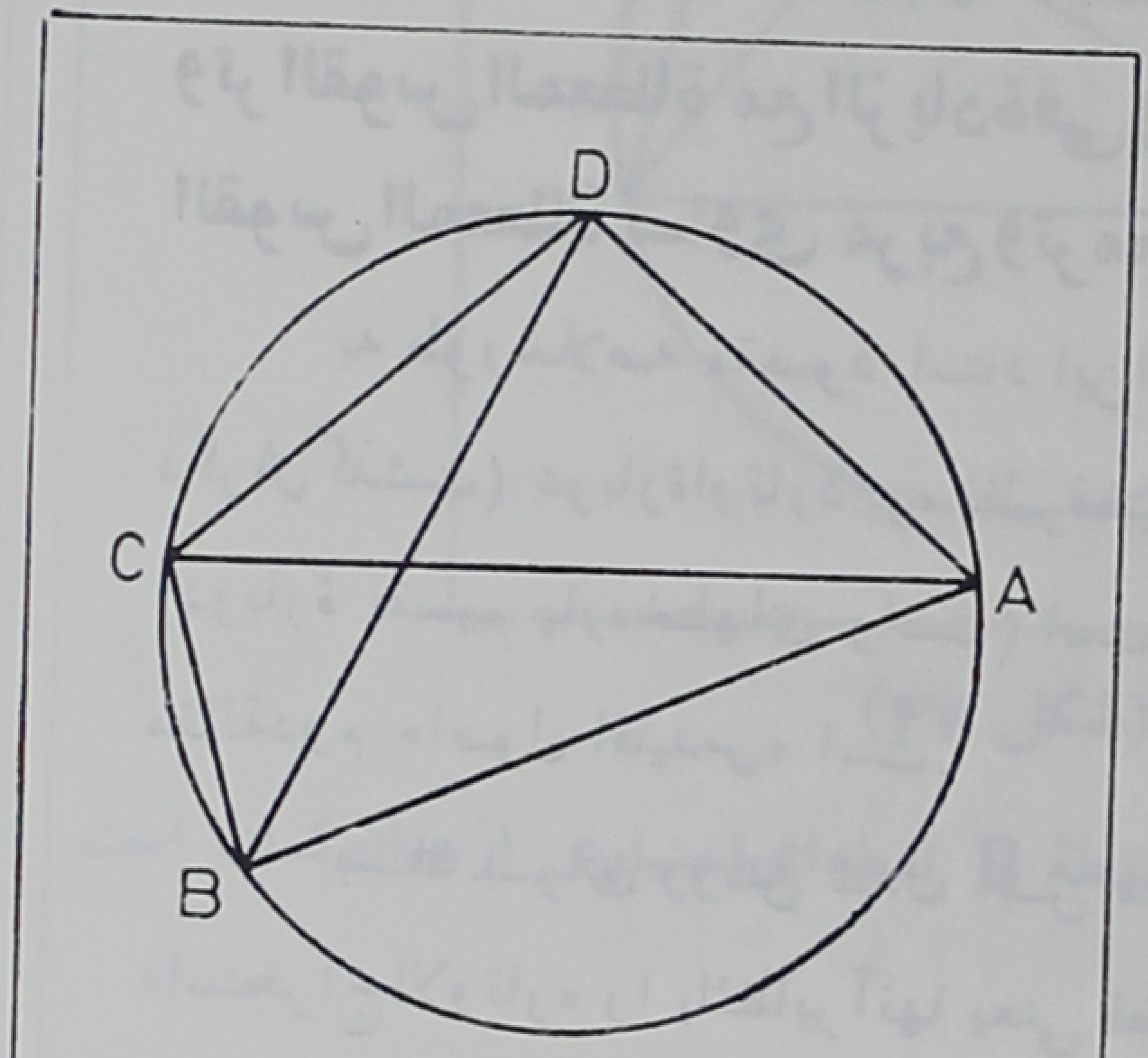
۵ - عنوان قضیهٔ سوم

درنسخهٔ خطی «عل» از کتاب «استخراج الاوتار» این قضیه و قضیهٔ چهارم هیچ یك جداگانه نیامده است ولی درضمن بعضی از برهانهای دو قضیهٔ اول و دوم ثابت شده و مورد استفاده قرار گرفته است[۱]. با این حال چون درنسخه‌های چاپی «استخراج-

الاوتار» (چد : صفحات ۳۹ تا ۴۵ ـ چم: صفحات ۷۸ تا ۸۵) این قضیـه جداگانه آمده و چندبرهان برای آن بیان شده‌است اینك به ذکر آن می‌پردازم.

استاداین قضیه‌را به‌عنوان اتمام قضیهٔ دوم ذکر کرده و آن‌راقسم دیگری‌ازقضیهٔ دوم دانسته ونوشته است: «اتمام‌هذه‌الدعوی الثانیه بقسمها الثانی حتی تکون دعوی ثالثة».

عنوان قضیهٔ‌سوم(۲) ـ این‌قضیه را می‌توان به صورت سادهٔ زیر بیان کرد (عبارت عربی آن را دریادداشت ذیل‌نوشته‌ام) :



(شکل۴۵)

اگـر وسط کمان $\widehat{AC}$ از دایره‌ای را نقطهٔ D بنامیم و در دنبال کمان $\widehat{AC}$ کمان‌دیگر $\widehat{CB}$ از دایره را درنظربگیریم رابطهٔ زیر بین‌وترهای این کمانها برقرار خواهدبود :

$$AB \times BC + \overline{DC}^2 = \overline{DB}^2$$

به عبارت‌دیگر:

اگر دریك‌دایره به کمان مفروض $\widehat{AC}$ کمان‌اضافی $\widehat{BC}$ را بیفزاییم ، حاصل ضرب وترمجموع این دوکمان دروتر کمان اضافی $\widehat{BC}$ به علاوهٔ مربع وتر نصف کمان مفروض مساوی‌خواهدبود بامربع‌وتر مجموع نصف کمـان مفروض و کمان اضافی.

یادداشتهای مربوط به عنوان قضیهٔ سوم

(۱)- مثلاً برهان سوم قضیهٔ چهارم درنسخهٔ «عل» در ضمن برهان شانزدهم قضیهٔ اول ذکرشده است.

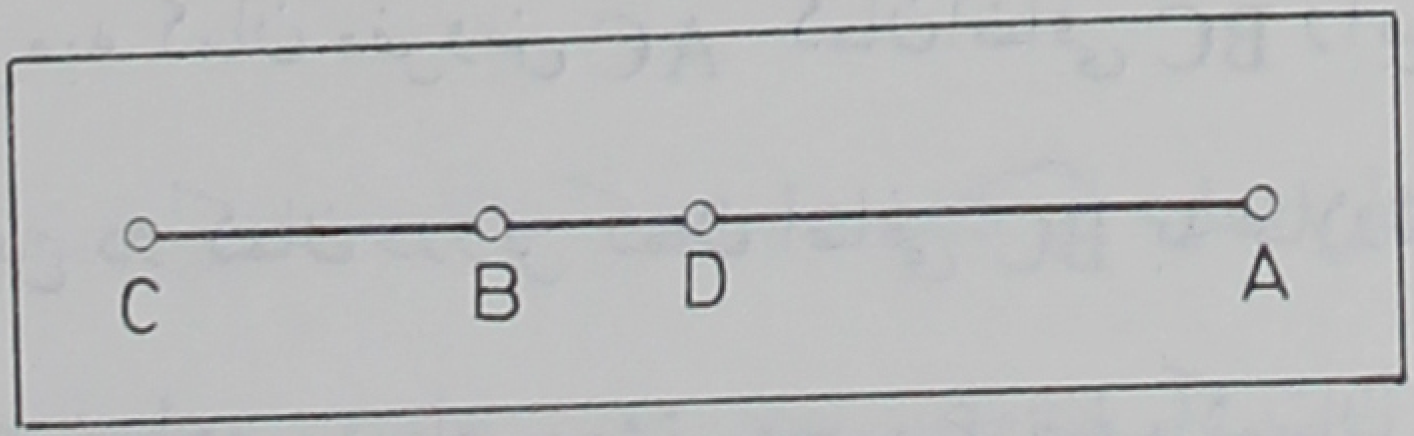
(۲)- استاد در بارهٔ این قضیه نوشته است (چد: ص ۳۹ - چم: ص ۷۸):

«وكمان قسمة القوس بنصفين وبقسمين مختلفين افادت فى اوتار خاصية مشابهة لمايقبلها الخط المستقيم المنقسم كذلك، فان القوس المعطاة اذا قسمت بنصفين وزيد عليها من دائرتها قوس ماعلى استدارتها، فان اوتار تلك الاقسام تقبل ايضا خاصية شبيهة مايقبلها الخط المستقيم كذلك و هى ان **مضروب وتر القوس المعطاة مع الزيادة فى وتر الزيادة مع مربع (وتر) نصف القوس المعطاة يساوى مربع وتر مجموع هذا النصف مع الزيادة»**

به طور خلاصه مقصود استاد این است که همان گونه که قضیهٔ دوم (که ذکرش گذشت) دربارهٔ اوتار دایره نظیر قضیهٔ پنجم ازمقالهٔ دوم «اصول اقلیدس» (دربارهٔ تقسیم پارهخطهای راست) است، قضیهٔ سوم نیز نظیر قضیهٔ ششم از مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس» است.

اینک برای روشن شدن این مطلب ذیلاً قضایای دوم وسوم «استخراج الاوتار» را بانظایر آنها یعنی قضایای پنجم وششم کتاب «اصول اقلیدس» درپی یکدیگر ذکر می کنم (اگرچه یک بار این کار را در «بیرونی-نامه» کرده‌ام)

قضیه پنجم ازمقالهٔ دوم «اصول اقلیدس»:

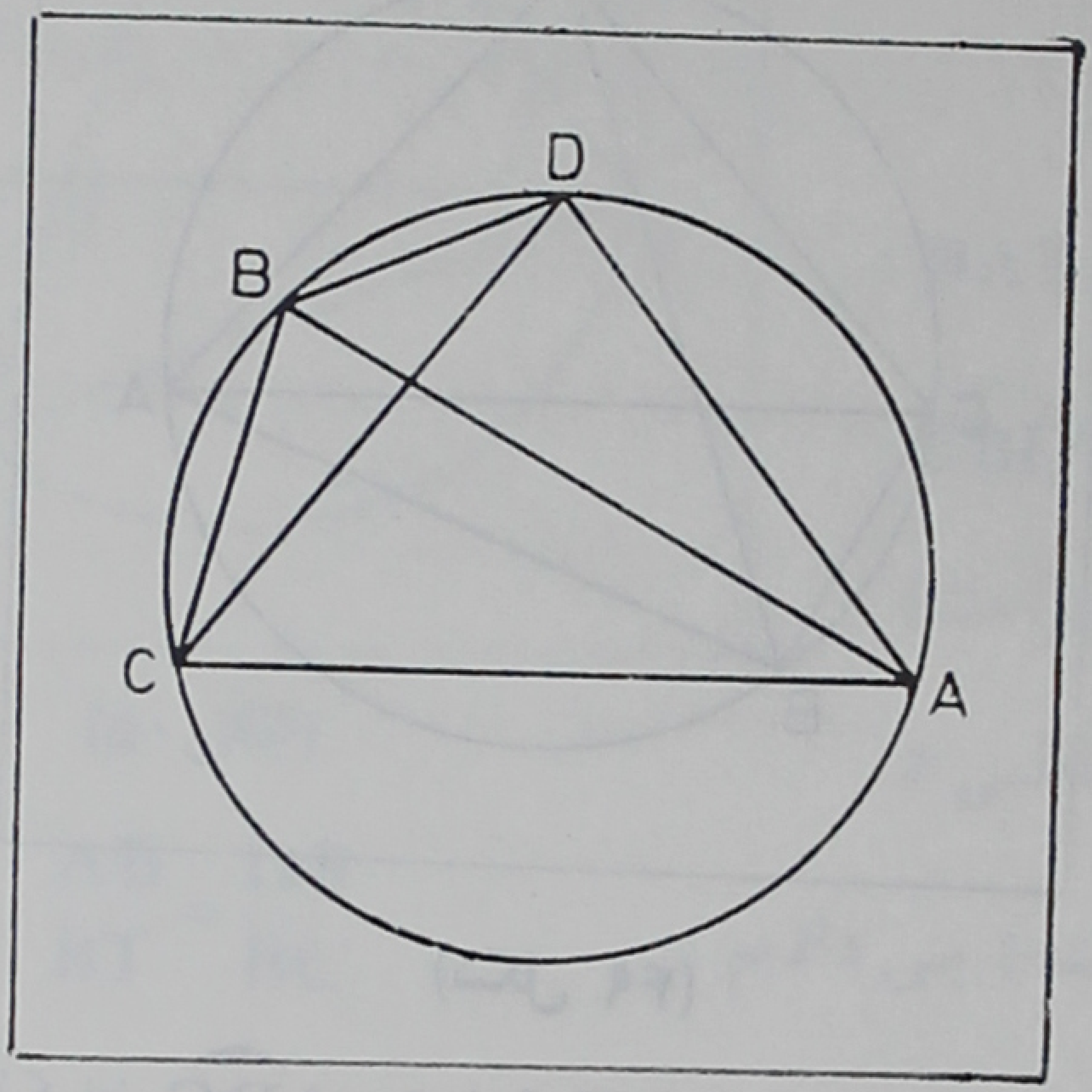


(شکل ۴۶)

نقطهٔ D وسط پاره خط AC و نقطهٔ B نقطه‌ای دلخواه از پاره خط AC است و داریم : $AB \times BC + \overline{BD}^{۲} = \overline{AD}^{۲} = \overline{CD}^{۲}$

(و رجوع کنید به تبصرهٔ ذیل عنوان قضیهٔ دوم ـ ص ۶۲)

قضیه دوم «استخراج الاوتار» (نظیر قضیهٔ پنجم از مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس»):

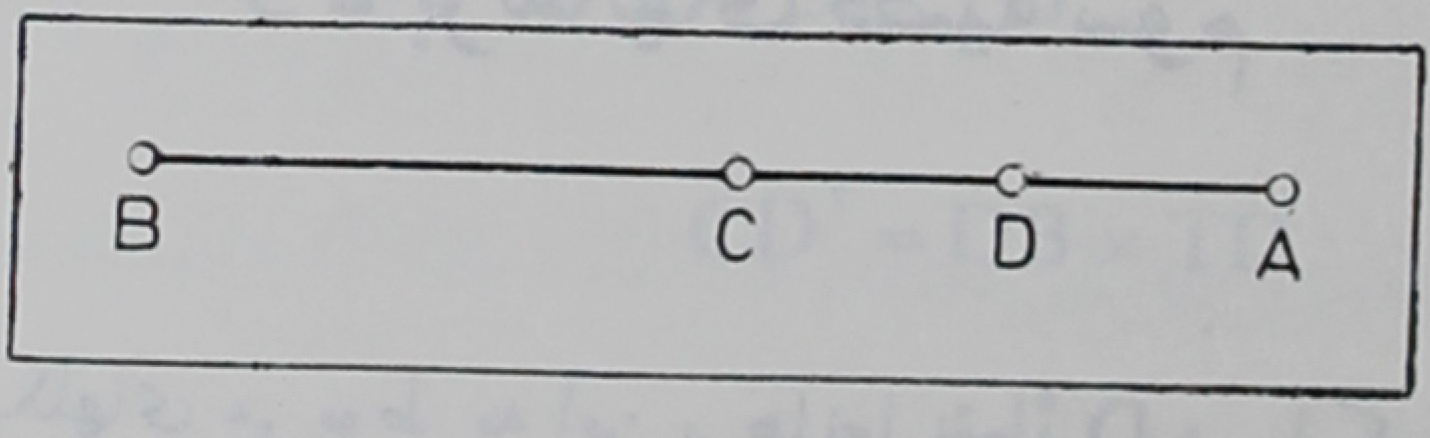


(شکل ۴۷)

نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ADC}$ و نقطهٔ B نقطه‌ای اختیاری از همان کمان است و داریم:

$$AB \times BC + \overline{BD}^{۲} = \overline{AD}^{۲} = \overline{CD}^{۲}$$

قضیهٔ ششم از مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس» :

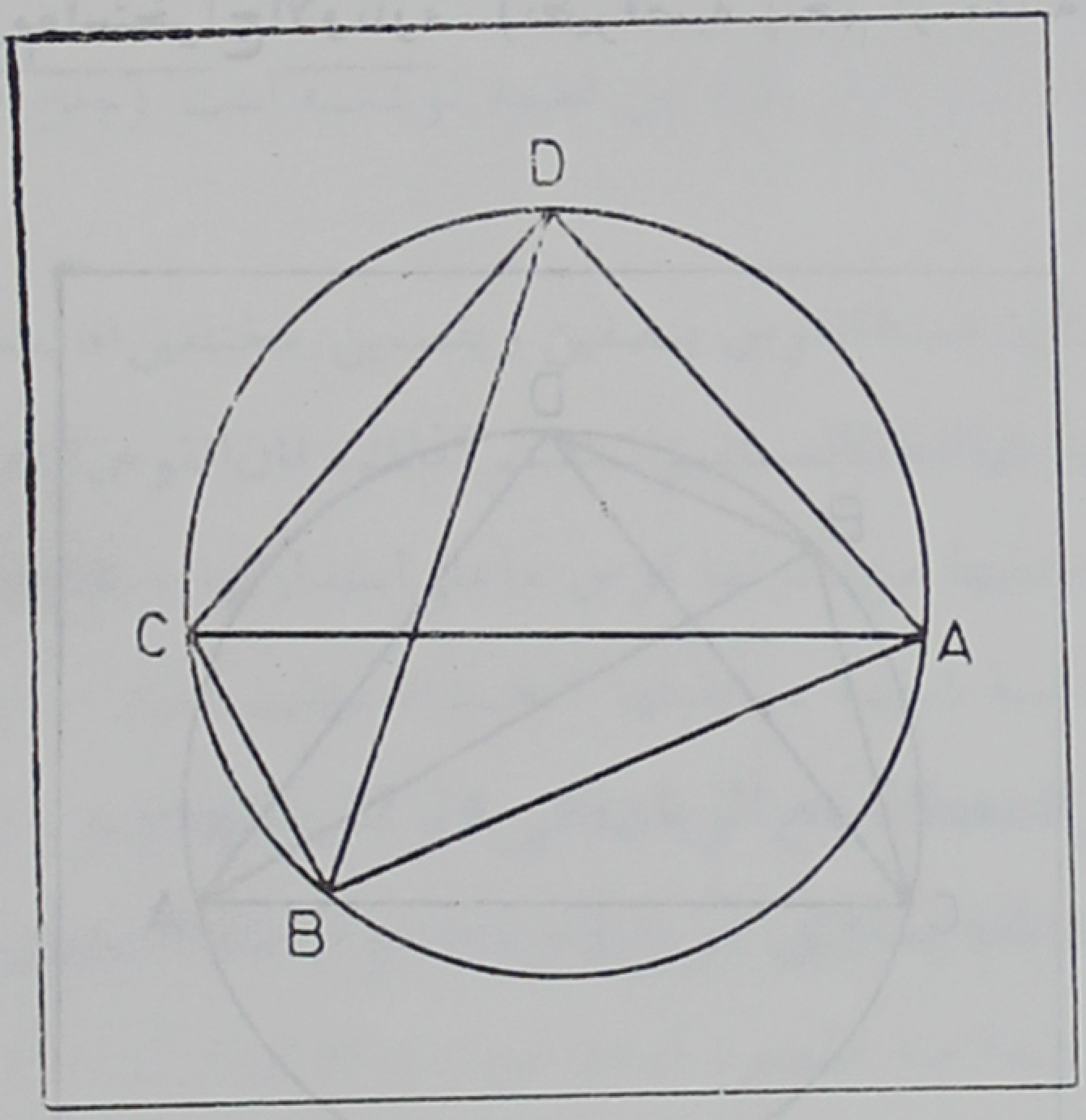


(شکل ۴۸)

نقطهٔ D وسط پاره خط AC و نقطهٔ B نقطه‌ای اختیاری واقع روی امتداد

پاره خط AC است وداریم : $AC.AB + \overline{CD}^{2} = \overline{DB}^{2}$

(ورجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان پنجم قضیهٔ دوم (صفحه ۱۲۹) قضیهٔ سوم «استخراج الاوتار» (نظیر قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس»):



(شکل ۴۹)

نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ADC}$ ونقطهٔ B نقطه‌ای اختیاری واقع روی دایره ودر خارج کمان مذکوراست وداریم:

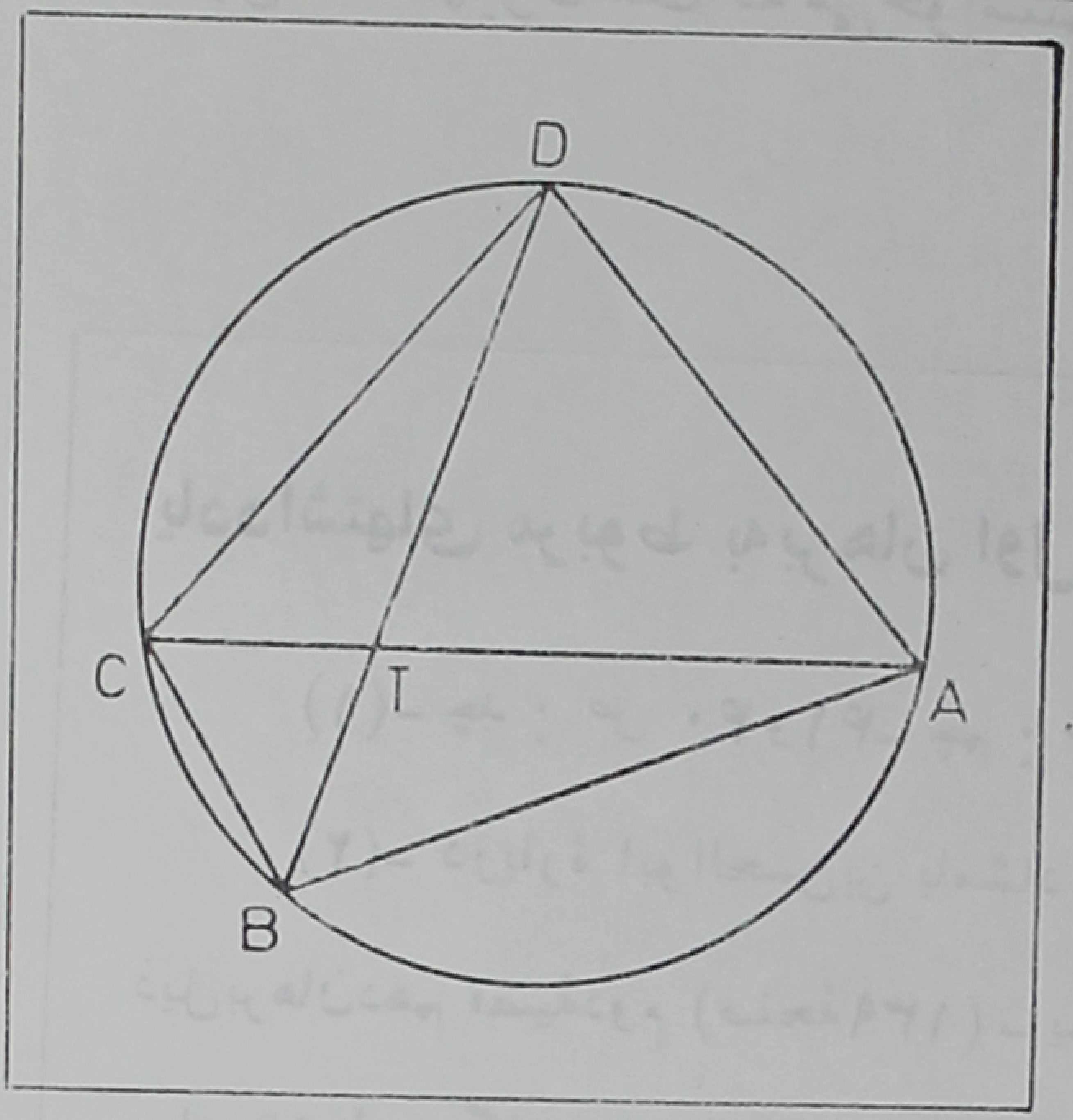
$$AC \times AB + \overline{CD}^{2} = \overline{DB}^{2}$$

و - برهانهای قضیهٔ سوم

(درهمهٔ شکلهای مربوط به این برهانها نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{AC}$ از دایره و کمان $\widehat{BC}$ دنبالهٔ کمان $\widehat{ADC}$ است و باید ثابت کرد :

$$AB \times BC + \overline{DC}^{2} = \overline{DB}^{2}$$

برهان اول قضیهٔ سوم(۱) **ـ** از ابو الحسن بن بامشاد(۲).



(شکل ۵۰)

نقطهٔ D وسط کمان AC را بـه نقطهٔ B وصل کـرده فصل مشترك BD و AC را نقطـهٔ T می‌نامیم.

دومثلـث BDC و BAT متشابهند. زیرا $\widehat{CBD} = \widehat{DBA}$ (نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ADC}$ است) و $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$ (محـاطـی و روبه روی یك کمان هستند) پس داریم:

$$\frac{AB}{BT} = \frac{DB}{BC}$$

و یا

$$AB \times BC = BT \times DB \qquad (۱)$$

ازطرف‌دیگر دومثلث BCD و CTD متشابهند. زیرا زاویهٔ D در هـر دو مشترك است و $\widehat{DCT} = \widehat{DBC}$ (زیرا محاطی وروبه‌روی دو کمان متساویند) پس داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{CD}{TD}$$

و یا

$$\overline{CD}^{۲} = DB \times TD \qquad (۲)$$

ازجمع‌دوتساوی (۱) و (۲) عضو به عضو حاصل می‌شود

$$AB \times BC + \overline{CD}^{۲} = BT \times DB + DB \times TD = DB(BT + TD)$$

یعنی $AB \times BC + \overline{CD}^2 = \overline{DB}^2$

واین همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان اول قضیهٔ سوم :

(۱)- چد : ص ۴۰و۴۱- چم : ص ۷۹ و ۸۰

(۲)- دربارهٔ ابوالحسن بن بامشاد رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۲) ذیل برهان دهم قضیهٔ دوم (صفحهٔ ۱۳۹) - یك برهان نیز از ابوالحسن بن بامشاد برای قضیهٔ دوم گذشت (برهان دهم قضیهٔ دوم)

برهان دوم قضیهٔ سوم(۱) - از ابوجعفر خازن(۲).

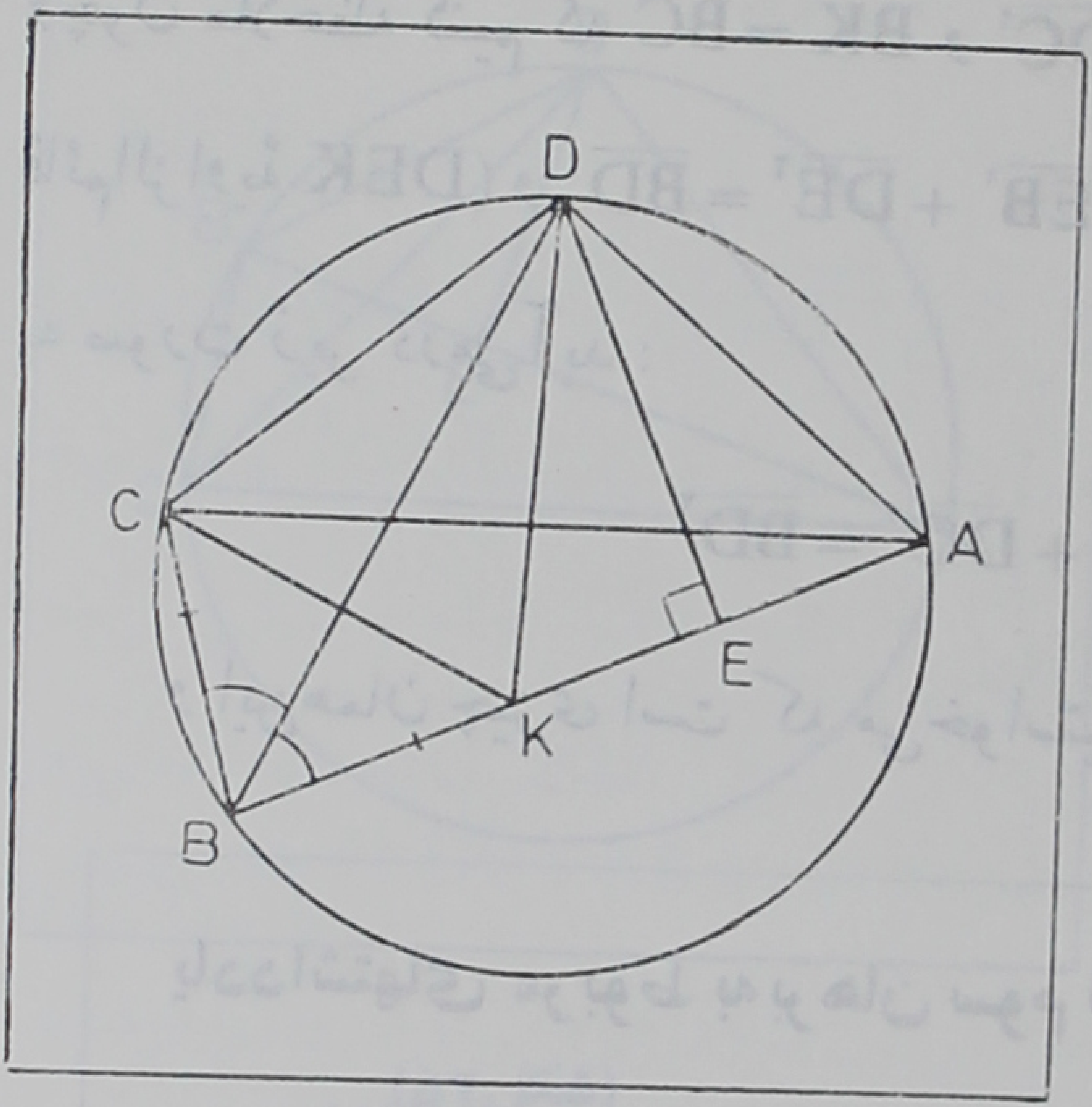
برهان ابوجعفر خازن اصولا مانند برهان ابوالحسن بامشاد است جز اینکه وی تساوی $AB \times BC = BT \times DB$ یعنی رابطهٔ (۱) برهان اول را از تشابه دو مثلث ABD و TBC به دست آورده و تساوی $\overline{CD}^2 = DB \times TD$ یعنی رابطهٔ (۲) برهان اول را از تشابه دو مثلث ATD و BAD و در نظر گرفتن تساوی $AD = CD$ نتیجه گرفته است.

یادداشتهای مربوط به برهان دوم قضیهٔ سوم :

(۱)- چد : ص۴۱ - چم : ص ۸۱

(۲)- ابوجعفر محمدبن حسین خراسانی خازن یکی از رجال نجوم و ریاضی درنیمهٔ اول قرن چهارم هجری بود که در خراسان متولد شد ودر اواخر عمر در ری می‌زیست. برای آگاهی یافتن ازتألیفات وی رجوع کنید به «قربانی: ریاضیدانان» صفحات ۸۸ تا ۹۴

برهان سوم قضیهٔ سوم(۱) - ازشخصی نامعلوم(۲).



(شکل ۵۱)

A را به B وصل کرده روی AB طول BK را مساوی با BC جدا می کنیم و پاره‌خطهای KC و KD را رسم می‌نماییم و ازنقطهٔ D عمود DE را بر AB فرود می‌آوریم.

دو مثلث BKD و BCD درحالت دوضلع و زاویهٔ بین آنها متساویند (BK = BC و BD مشترك).

بنابراین KD = CD و چون نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{AC}$ است داریم :

$$KD = CD = DA$$

پس مثلث DKA متساوی‌الساقین است و عمود DE قاعدهٔ آن یعنی KA را نصف می کند.

پس نقطهٔ E وسط پاره‌خط KA است وچون نقطهٔ B درامتدادآن قراردارد (نظر به قضیهٔ ششم مقالهٔ‌دوم اصول «اقلیدس»(۳)) داریم :

$$BA \times BK + \overline{EK}^{2} = \overline{EB}^{2}$$

به دوطرف این تساوی مقدار $\overline{DE}^{2}$ را می‌افزاییم حاصل می‌شود :

$$AB \times BK + \overline{EK}^{2} + \overline{DE}^{2} = \overline{EB}^{2} + \overline{DE}^{2} \quad (1)$$

وچون ملاحظه کنیم که $BK = BC$ و $\overline{EK}^{2} + \overline{DE}^{2} = \overline{DK}^{2} = \overline{DC}^{2}$ (از مثلث قائم‌الزاویهٔ DEK) و $\overline{EB}^{2} + \overline{DE}^{2} = \overline{BD}^{2}$ (ازمثلث‌قائم‌الزاویهٔ BDE) رابطهٔ(۱) به صورت زیر درمی‌آید :

$$AB \times BC + \overline{DC}^{2} = \overline{BD}^{2}$$

و این‌همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به‌برهان سوم قضیهٔ سوم:

(۱)- چد : ص ۴۲ - چم : ۸۱

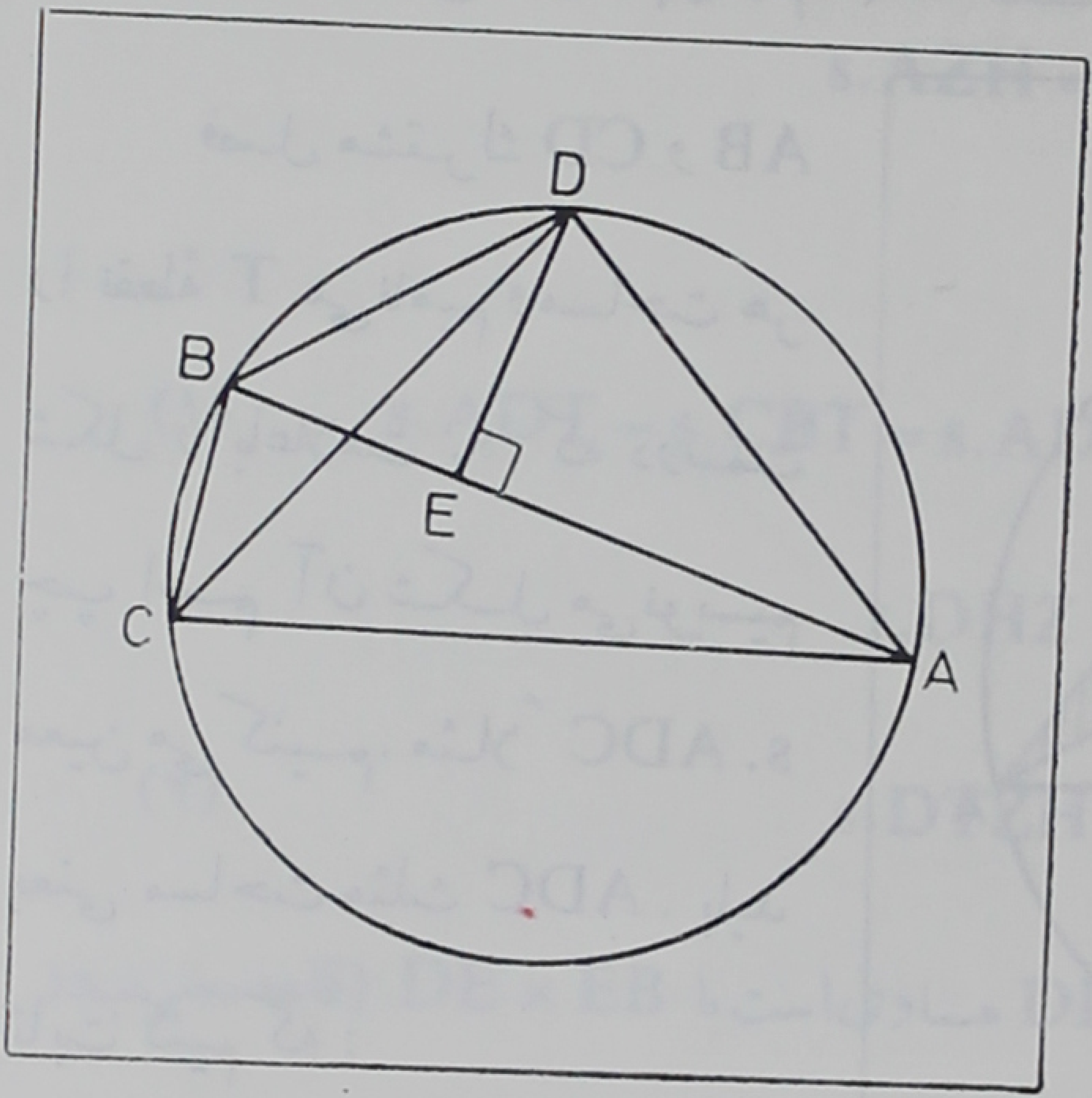
(۲)- استاد درآغاز این برهان نوشته است : «برهان لبعضهم علی ذلك ولم‌یذکر اسمه»

(۳) - رجوع کنید به یاد داشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان پنجم قضیهٔ دوم

ز ـ عنوان قضیهٔ چهارم

این قضیه نیز مانند قضیهٔ سوم در نسخهٔ خطی «عل» نیامده است. با این حال چون در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (چد: ص ۴۵ ـ چم: ص ۸۵) جداگانه ذکر و چند برهان برای آن بیان شده اینک به ذکر آن می‌پردازم.

عنوان قضیهٔ چهارم(۱) ـ اگر $\widehat{AC}$ کمانی از دایره و نقطهٔ D وسط آن و نقطهٔ B نقطهٔ دلخواهی متعلق به آن باشد و از نقطهٔ D عمود DE را بر AB فرود آوریم، تفاضل مساحتهای مثلث متساوی‌الساقین ACD و مثلث ABC مساوی است با حاصل ضرب DE × EB (یعنی دو برابر مساحت مثلث BED).



(شکل۵۲)

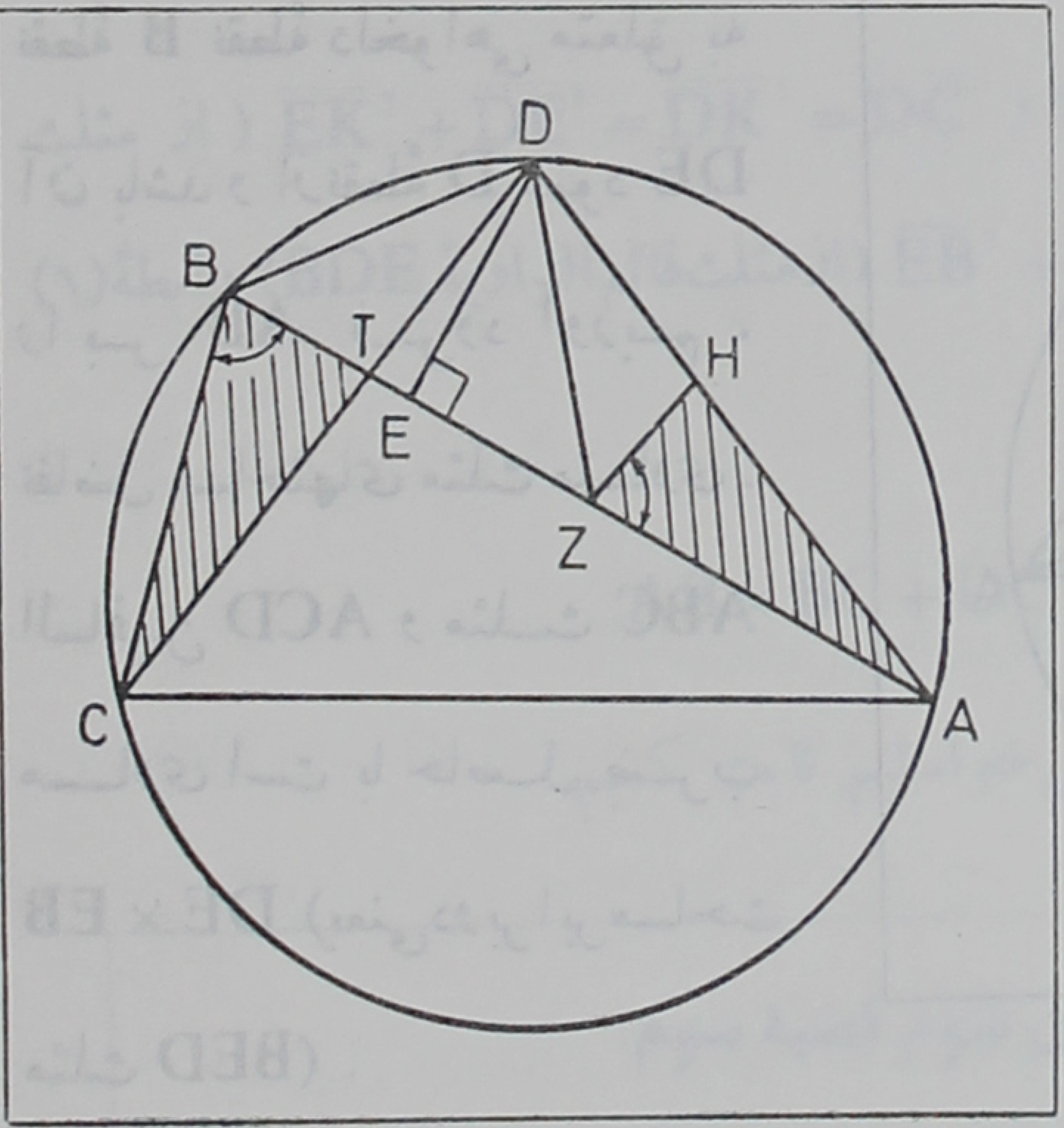
یادداشت مربوط به عنوان قضیهٔ چهارم:

(۱)ـ استاد در آغاز این قضیهٔ نوشته است: « وتوجد لهذا الشکل خاصیةاخری نافعه ...»

ح - برهانهای قضیهٔ چهارم

(شکل مربوط به قضیهٔ چهارم عیناً همان شکل مربوط به قضیهٔ اول است یعنی درهمهٔ این برهانها نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{AC}$ ونقطهٔ B نقطهٔ دلخواهی متعلق به کمان $\widehat{AC}$ و DE عمود بر AB است).

برهان اول قضیهٔ چهارم(۱) - نخستین برهان از استاد بیرونی.



(شکل ۵۳)

فصل مشترك CD و AB را نقطهٔ T می‌نامیم ومساحت هر شکل راباعلامت .s که درسمت چپ اسم آن شکل می‌نویسیم معین می کنیم. مثلاً s. ADC یعنی مساحت مثلث ADC . باید ثابت کنیم که :

$$\delta = s.ADC - s.ABC = DE \times EB$$

سطح مثلث ATC بین‌سطحهای‌دومثلث ADC و ABC مشترك‌است. اگر این قسمت مشترك‌را از سطحهای آن دو مثلث حذف کنیم برای اثبات رابطهٔ (۱) کافی است نشان دهیم که :

$$\delta = s.ADT - s.BTC = DE \times EB$$

برای این کار از روی پاره‌خط EA پاره‌خط EZ را مساوی با EB جدا می کنیم. واضح است که دراین‌صورت BD = DZ وچون درقضیهٔ اول ثابت کرده‌ایم که‌نقطهٔ E وسط‌خط‌شکستهٔ ABC‌است (یعنی AE = EB + BC) پس AZ = BC و دومثلث AZD و CBD (درحالت سه‌ضلع) باهم‌مساویند.

اکنون‌نقطهٔ H را روی AD طوری‌اختیارمی کنیم که‌زاویهٔ AZH مساوی بازاویهٔ CBT شود. دراین صورت داریم:

$$s.AZH = s.CBT$$

و از روی شکل واضح است که :

$$s.ADT - s.CBT = s.ADT - s.AZH = s.DTZH \qquad (۱)$$

وچون

$$s.DHZ = s.DTB$$

پس :

$$s.DTZH = s.DBZ \qquad (۲)$$

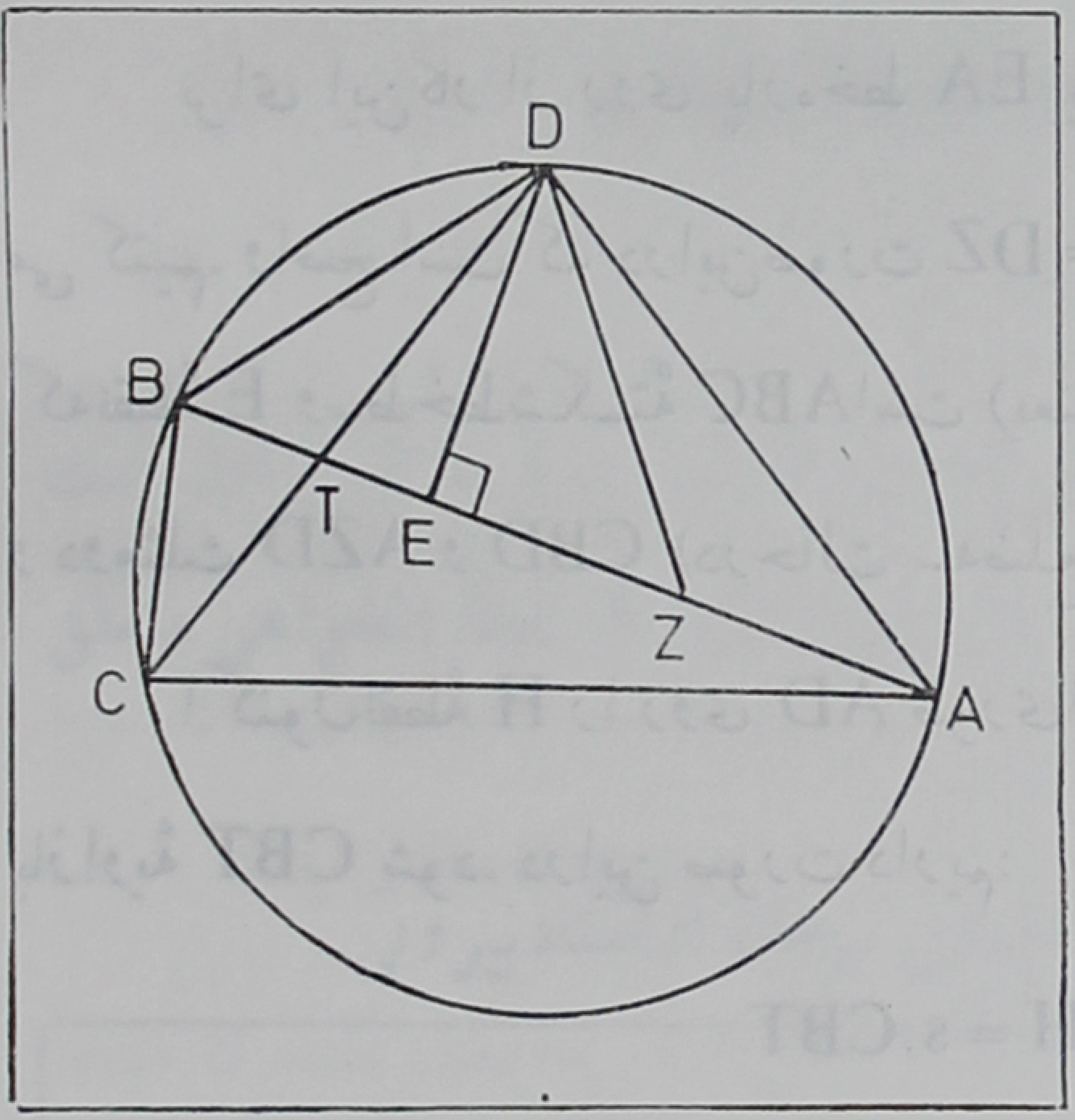
اما مساحت مثلث متساوی‌الساقین DBZ مساوی‌است‌با DE × EB (قاعده‌ضرب‌در نصف‌ارتفاع) پس تساوی (۱) را با درنظر گرفتن تساوی (۲) می‌توان چنین‌نوشت:

$$s.ADT - s.CBT = s.DBZ = DE \times EB$$

واین همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشت :
(۱)- چد : ص ۴۶ سطرسوم به‌بعد (چند غلط چاپی دارد) - چم : ص ۸۵

برهان دوم قضیهٔ چهارم(۱) - دومین برهان از استاد بیرونی.



(شکل۵۴)

مانند برهان اول فصل مشترك AB و CD را نقطهٔ T می‌نامیم و روی EA پاره‌خط EZ را مساوی با EB جدا می‌کنیم. واضح است که در این صورت $BD = DZ$ وچون در قضیهٔ اول ثابت کرده‌ایم که:

$$EA = EB + BC$$

پس $AZ = BC$ و در نتیجه دو مثلث AZD و CBD (درحالت سه‌ضلع) متساویند. و ازروی شکل واضح است که:

$$s.AZD - s.BTC (= s.CBD - s.BTC) = s.DBT$$

(دراین تساوی مثلاً s. AZD یعنی مساحت مثلث AZD)

به دوطرف این تساوی مقدار s.DTZ را می افزاییم حاصل می‌شود:

$$s.AZD + s.DTZ - s.BTC = s.DBT + s.DTZ$$

یعنی: $$s.ADT - s.BTC = s.DBZ \qquad (1)$$

اما $$s.DBZ = DE \times EB$$

وازطرف دیگر اگر به دو جملهٔ تفاضل طرف چپ تساوی (۱) مقدار s.ATC را بیفزاییم این تفاضل تغییر نمی کند وداریم:

$$s.ADT - s.BTC = s.ADC - s.ABC$$

بنابراین تساوی (۱) را به صورت زیر می‌توان نوشت :

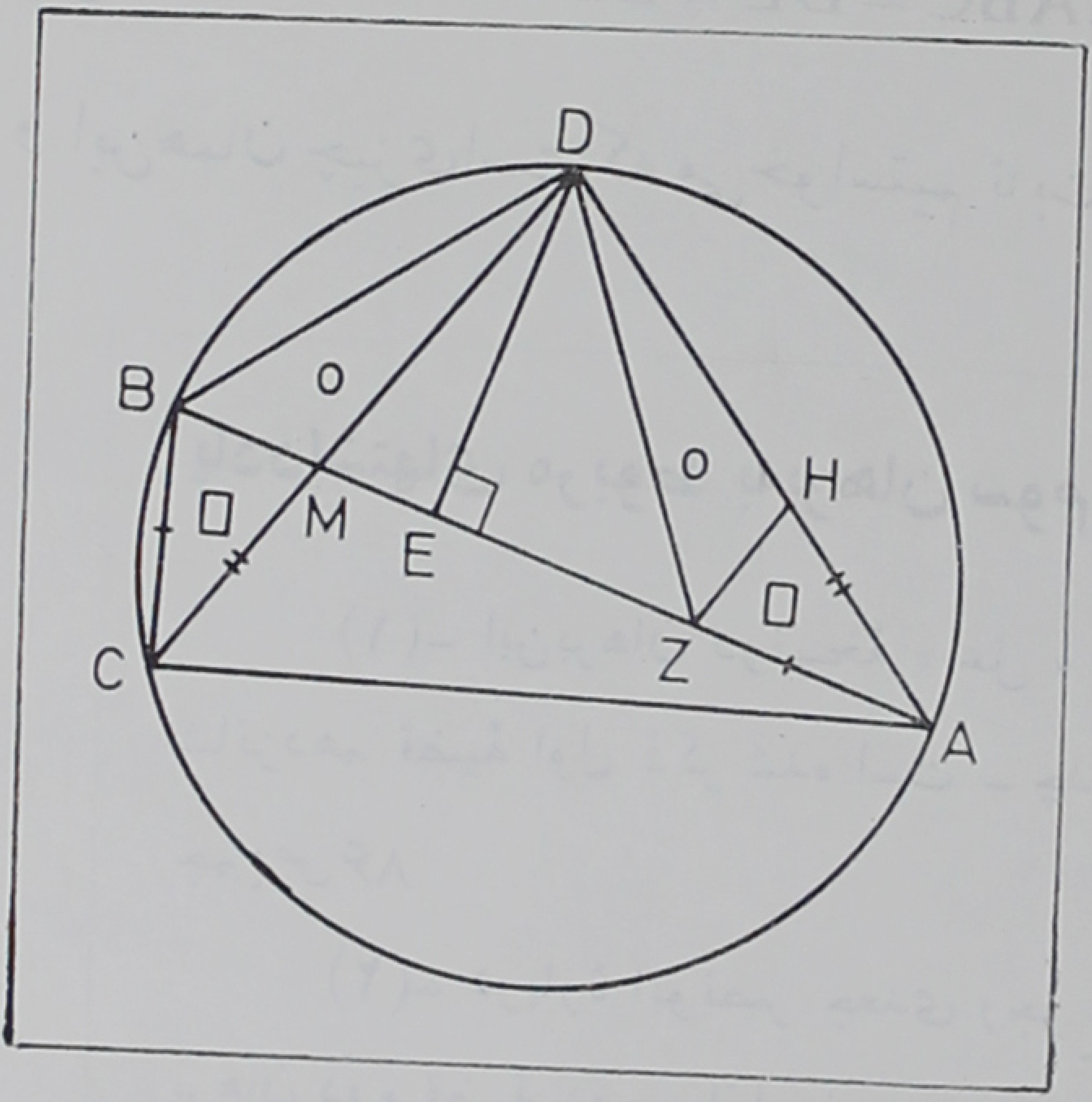
$$s.ADC - s.ABC = DE \times EB$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشت:

(۱)- چد: ص۴۶ شش سطر آخر صفحه - چم: ص۸۶ از سطر ششم به بعد

برهان سوم قضیهٔ چهارم(۱) - سومین برهان از ابونصر جعدی(۲) (= ابو- نصر عراق)



(شکل ۵۵)

فصل مشترک AB و CD را نقطهٔ M می‌نامیم و روی EA پاره‌خط EZ را مساوی با BE و روی AD پاره خط AH را مساوی با CM جدا می‌کنیم.

واضح است که دو مثلث AHZ و CMB باهم و دومثلث DHZ و DMB با هم مساویند و از روی شکل پیداست که :

$$s.BMC + s.BMD + s.DMZ = s.ADM$$

(دراین تساوی مثلاً s.BMC یعنی مساحت مثلث BMC)

به دوطرف این تساوی s.AMC را می افزاییم :

$$\underbrace{s.AMC + s.BMC}_{s.ABC} + \underbrace{s.BMD + s.DMZ}_{s.BDZ} = \underbrace{s.AMC + s.ADM}_{s.ADC}$$

بنا براین داریم :

$$s.BDZ = s.ADC - s.ABC$$

اما

$$s.BDZ = DE \times EB$$

پس

$$s.ADC - s.ABC = DE \times EB$$

و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم .

یادداشتهای مربوط به برهان سوم قضیهٔ چهارم :

(۱)- این برهان درنسخهٔ « عل » جداگانه نیامده ولی درضمن برهان شانزدهم قضیهٔ اول ذکر شده است - چد : ص ۴۷ (مغلوط چاپشده) - چم: ص ۸۶

(۲)- دربارهٔ ابونصر جعدی رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان دوم قضیهٔ دوم- ازابونصر عراق دوبرهان برای قضیهٔ اول به عنوان برهانهای دوازدهم وشانزدهم قضیهٔ اول ودوبرهان برای قضیهٔ دوم به عنوان برهانهای دوم وسوم قضیهٔ دوم ذکرکرده ام.

***

برهان دیگری برای قضیهٔ چهارم- در کتاب «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد (چد : ص۴۷ و ۴۸) برهان ناقصی برای قضیهٔ چهارم از ابوعبدالله الشنّی ذکر شده و در نسخهٔ چاپ مصر همان کتاب (چم : ص۸۷ به بعد) از روی نسخهٔ خطی دیگری اصلاح شده‌است. همین برهان ابوعبدالله الشنّی در نسخهٔ خطی «عل» در جزو برهانهای قضیهٔ اول آمده ولی مخدوش و ناقص است و سوتر به‌وجهی آن را تصحیح کرده‌است (عل : ص۹و۹۸ - سوتر A : ص۲۰ وصفحات ۶۷و۶۸) - چون این برهان مفصل و متن عربی آن ناقص است از ذکر آن صرف نظر می کنم. - از ابوعبدالله الشنّی برهانهای سیزدهم و پانزدهم قضیهٔ اول و برهان پنجم قضیهٔ دوم را قبلاً ذکر کرده‌ام. و نیز رجوع کنید به تبصرهٔ (۲) ذیل برهان پنجم قضیهٔ دوم.

ط- تبصره‌ای در بارهٔ قضایای چهارگانهٔ مذکور

استاد بیرونی درچند مورد خاطرنشان کرده است که می‌توان برهان بعضی از این چهار قضیه را مقدم قرارداد و بعد بااستفاده از آن قضایای دیگر را ثابت کرد. مثلا در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (چد : ص۴۸ - چم ۸۹) آمده است : «وهذه الخواص مشتبکه بعضها ببعض تصح احداهما من صحة الاخری» و در همان نسخه‌ها (چد: ص۴۲ - چم: ص۸۲) در بارهٔ قضایای دوم و سوم آمده است : «وهاتان الخاصیتان تشتبکان حتی تصح احداهما الاخری وتصح بنفسها منفرده).

خود استاد در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (چد: ۴۴ و ۴۵ - چم : ص۸۲ تا ۸۵) این عمل را در بارهٔ قضایای دوم و سوم انجام داده‌است.

همچنین در نسخهٔ خطی «عل» (ص۸) ابتدا قضیهٔدوم ثابت شده و بعداً قضیهٔاول از آن نتیجه گرفته شده‌است (رجوع کنید به تبصرهٔ ۲ ذیل برهان پنجم قضیهٔدوم). همچنین در بسیاری از برهانهای قضایای دوم و سوم و چهارم از قضیهٔاول استفاده شده است. برای احتراز از طولانی شدن کلام از ذکر این موارد خودداری می کنم.

بخش چهارم

مسائل کتاب استخراج الاوتار

الف ـ مقدمه

پس از بیان واثبات چهار قضیهٔ مذکور در بخش قبل استاد روی هم‌رفته سی مسئلهٔ مختلف را با استفاده از آن قضایا حل کرده است که در این بخش به ذکر آنها می‌پردازم.

در نسخهٔ خطی «عل» (که در آن فقط دو قضیه از قضایای مذکور جداگانه مطرح وثابت شده) در آغاز این مسائل آمده است (عل: ص۱۸):

«ولقد حل هذان الشکلان من الاصول الهندسیة محلاً جلیلاً ...»

امادر نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (که در آنها هر چهار قضیه جداگانه مطرح وثابت شده) در آغاز این مسائل چنین آمده است (چد: ص۴۹ـ چم ص۹۰):

«و هذه الخواص التی قدمناها معدودة من الاصول الهندسیة، ولذلک رجعت الیها فی مطلوبات کثیرة خرجت بها ، وانا اذکر عدة عن ذلک، ومتی اتفق لغیری منها

شیء نسبته الیه وسمیته باذن الله تعالی وعونه»

حاصل و خلاصهٔ هردو عبارت مذکور این است که :

«قضایایی که قبلا ذکر کردیم معدودی از خواص اصلی هندسه هستند و در حل بسیاری از مسائل می‌توان از آنها استفاده کرد که اینک به‌ذکر عده‌ای از آنها می‌پردازم و راه حلهایی که ازخود من نیست بنام صاحبانشان ثبت می کنم . »

تبصره - این سی‌مسئله را می‌توان به دو دستهٔ متمایز تقسیم کرد.

دستهٔ اول (مشتمل بر ۱۵ مسئله):

پنج مسئلهٔ اول مسائل مربوط به ترسیم مثلث به وسیلهٔ ستاره وپرگار است.

مسئلهٔ ششم مربوط به محاسبهٔ پاره خطهایی است که پای یك ارتفاع مثلث روی قاعدهٔ نظیر آن پدید می‌آورد.

مسئلهٔ هفتم برهان درستی دستور محاسبهٔ مساحت مثلث برحسب اضلاع آن است .

مسئلهٔ هشتم برهان درستی دستور محاسبهٔ مساحت چهار ضلعی محاطی برحسب اضلاع آن است.

مسائل نهم و دهم مسائلی هستند که در کتابهای جبر قدیمی ذکر شده است .

مسائل یازدهم و دوازدهم و سیزدهم و چهاردهم وپانزدهم مسائلی هستند که درهیئت ونجوم به‌کار می‌روند.

دستهٔ دوم (مشتمل بر ۱۵ مسأله):

مسائل شانزدهم تا سی‌ام مربوط به محاسبهٔ اوتار دایره هستند.

ب ـ مسائل هندسی و جبری و نجومی

مسئلهٔ اول (۱) ـ **ترسیم دو خط راست که از دو نقطهٔ معلوم A و C بگذرند ویکدیگررا درنقطه‌ای مانند B قطع کنند به‌قسمی که زاویهٔ ABC مساوی بازاویهٔ معلوم α و مجموع AB + BC مساوی با طول معلوم l باشد** (۲).

(صورت این مسئله را بدو وجه زیر نیز می‌توان بیان کرد:

الف ـ دو نقطهٔ A و C و زاویهٔ α و پاره خط TH به طول l مفروض است. می‌خواهیم نقطه‌ای مانند B بیابیم به‌قسمی که پاره خط AC از آن نقطه به زاویهٔ α دیده شود و مجموع دو پاره خط AB و BC مساوی با l باشد.

ب ـ ازمثلث ABC زاویهٔ B وضلع AC و مجموع دو ضلع دیگر معلوم است. آن‌مثلث را رسم کنید(۳)).

استاد تاریخچهٔ این مسئله را چنین‌شرح داده‌است:

> «**مانالاوس**(۴) درشکل(= قضیه‌یامسئله) دوم از مقالهٔ سوم‌کتاب خود موسوم به«الاصول الهندسیة(۵)»خواسته بود معلوم کند که‌چگونه ممکن است درنیمدایرهٔ معلومی خط شکسته‌ای (دوضلعی) محاط کردکه طول آن مساوی باپاره خط معلومی باشد. و درحل‌این مسئله راهی بس‌طولانی پیش گرفته بود. سپس **ثابت‌بن‌قره**(۶)درضمن تفسیر آن کتاب (= اصول‌الهندسیة) راهی‌رفت که به‌همان‌اندازه طولانی بود.

اما با درنظر گرفتن آنچه قبلا، دربارهٔ خط شکسته‌ای که دریك کمان دلخواه ازدایره محاط باشد ،گفتیم(۷) نه تنها حل مسئله‌ای که **مانالاوس** طرح کرده آسان است بلکه می‌توان آن را به‌هر کمانی از دایره (ونه فقط نیم دایره) تعمیم داد »

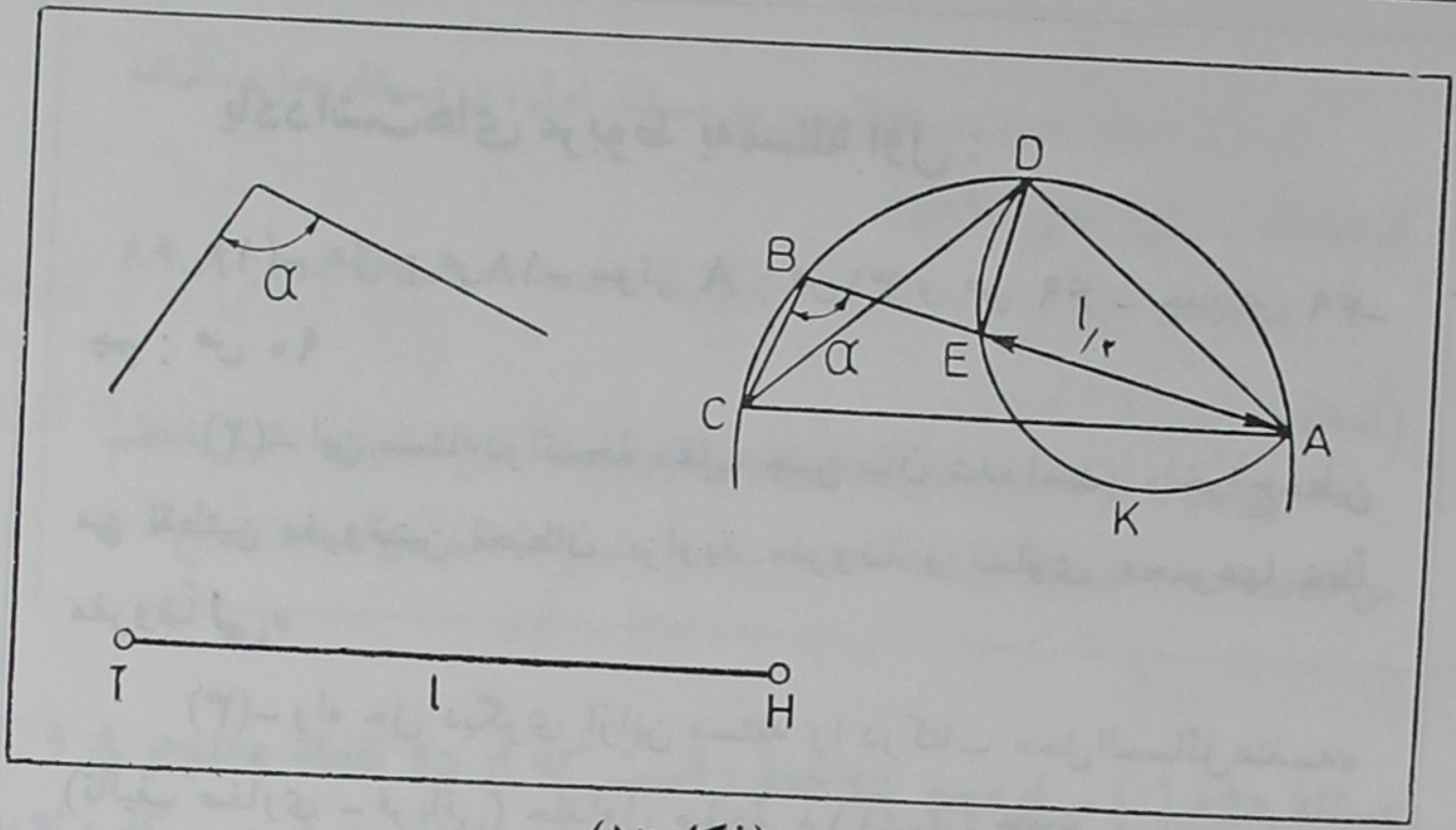
«سپس **ابوالجود محمدبن‌لیث**(۸) که خدایش بیامرزادمقاله‌ای را به حل‌این مسئله اختصاص داد وآن را به‌وجهی بسیارطولانی ومشکل حل کرد . تا اینکه **ابوسعیداحمدبن‌محمدبن‌عبدالجلیل‌سجزی**(۹) ازاین‌مسئله آگاهی یافت وبرای‌آن راه‌حلی که بی‌اندازه‌آسان است پیداکرد. راهی راکه ما برای حل این‌مسئله با استفاده ازخاصیت خط شکستهٔ محاط در کمان‌دایره، که به‌وسیلهٔ پای‌عمودی که ازوسط‌آن کمان برآن‌خط فرودآید نصف می‌شود، یافته‌ایم زیاد ازراه حل او (= سجزی) دورنیست.»

راه‌حل مسئلهٔ اول ازاستاد(۱۰)ـ نقاط A و C رابه هم وصل کرده کمان درخورزاویهٔ α نظیرپاره خط AC رارسم می کنیم(۱۱) ووسط آن کمان رانقطهٔD می‌نامیم‌و D را به A وصل می کنیم . باید طول مفروض l از طول AC بزرگتر باشد ولی از ۲AD بزرگتر نباشد(۱۲) تا حل مسئله ممکن باشد.

سپس به قطر AD نیمدایرهٔ AKD را (مطابق باشکل) رسم کرده‌درآن‌وتر AEرا مساوی با نصف‌طول‌معلوم l می کشیم‌وآن‌را امتداد می‌دهیم تا کمان درخور مذکور رادرنقطه‌ای مانند B قطع کند و B را به C وصـل کرده می گوییم:

$$\widehat{ABC} = \alpha \quad \text{و} \quad AB + BC = l$$

(یعنی در واقع خطهای AB و BC جواب مسئله‌اند)



(شکل۵۶)

برهان - پاره خط DE را رسم می کنیم. واضح است که DE برAB عمود است . وچون این عمود از وسط کمان ADC فرودآمده است (بنا برقضیهٔ اول)

داریم:

$$AE = EB + BC$$

اما داشتیم :

$$AE = \frac{1}{2} l$$

پس :

$$EB + BC = \frac{1}{2} l$$

و (از جمع کردن دو تساوی اخیرعضو به‌عضو حاصل‌می‌شود):

$$(AE + EB) + BC = \boxed{AB + BC = l}$$

از طرف دیگر زاویهٔ ABC مساوی با زاویهٔ α است زیرا نقطهٔ B روی کمان درخور زاویهٔ α واقع است.

و این همان‌چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشت‌های مربوط به‌مسئلهٔ اول :

(۱)- عل : ص۱۸- سوتر A : ص۳۱ و ص ۶۹ - چد: ص ۴۹- چم : ص ۹۰

(۲)- این مسئله‌در نسخهٔ «عل» چنین بیان شده است: «اخراج خطین من نقطتین مفروضتین تحیطان بزاویة مفروضة و تساوی مجموعها خطاً مفروضاً لی»

(۳)- راه حل دیگری ازاین مسئله را درکتاب «حل المسائل هندسه» (تألیف صفاری ـ قربانی) جلداول صفحهٔ ۱۱۸شمارهٔ ۲۳۳ خواهید یافت.

(۴)- Menelaus (= منلاوس)- در منابع دورهٔ اسلامی نام‌وی را به صورتهای « مانالاوس » و « مناولاس » وغیره نیزثبت کرده‌اند-درنسخهٔ « عل : ص ۱۸» در سه مورد به جای « مانالاوس » به‌غلط « مالاناوس » نوشته شده است.

- برای‌کسب اطلاع دربارهٔ‌آثار منلاوس رجوع کنید به «هیث H» ج۲ ص۲۶۰ به‌بعد.

(۵)- ابن ندیم درکتاب « الفهرست » ازکتاب « الاصول الهندسیة» تألیف مانالاوس نام برده ونوشته‌است که ثابت‌بن‌قره‌آن را به‌سه‌مقاله‌درآورد (← ترجمهٔ فارسی « الفهرست» ص۴۸۲) و هیث‌درکتاب « تاریخ‌ریاضیات یونانی » به‌این مطلب اشاره‌کرده است (←«هیث H، ج۲ :ص۲۶۰)

(۶) - رجوع کنید به « بیرونی‌نامه » ص ۵۳۵

(۷)- مقصود قضیهٔ اول است .

(۸)- رجوع کنید به«بیرونی‌نامه»:ص۵۲۴ یا‌به «ریاضیدانان‌ایرانی» ص ۲۱۴ تا ۲۲۰

(۹) رجوع کنید «به‌بیرونی‌نامه»: ص۵۲۷ یا به «ریاضیدانان‌ایرانی» صفحات ۲۵۰ تا ۲۶۸

(۱۰)- استاد خود در پایان صورت مسئلهٔ اول، در نسخهٔ «عل»، اضافه کرده است : «لی» یعنی «ازمن»

(۱۱) - رجوع کنید به « نه مقالهٔ هندسه » ، مقالهٔ دوم: ص۸۹ (کمان در خوریك زاویه) .

(۱۲) - در نسخهٔ «عل» (ص۱۸ سطر پنجم از آخر) به‌جای «لیس باعظم من ضعف اد» اشتباهاً نوشته شده است : «لیس باعظم من ضعف مربع اد»

مسئلهٔ دوم (۱) **- ترسیم دوخط راست که از دو نقطهٔ معلوم A و C بگذرند و یکدیگر را در نقطه‌ای مانند B قطع کنند به قسمی که زاویهٔ ABC مساوی با زاویهٔ معلوم α و (قدر مطلق) تفاضل AB − BC مساوی با طول معلوم l باشد**(۲)**.**

(صورت این مسئله را به دو وجه زیر می‌توان بیان کرد:)

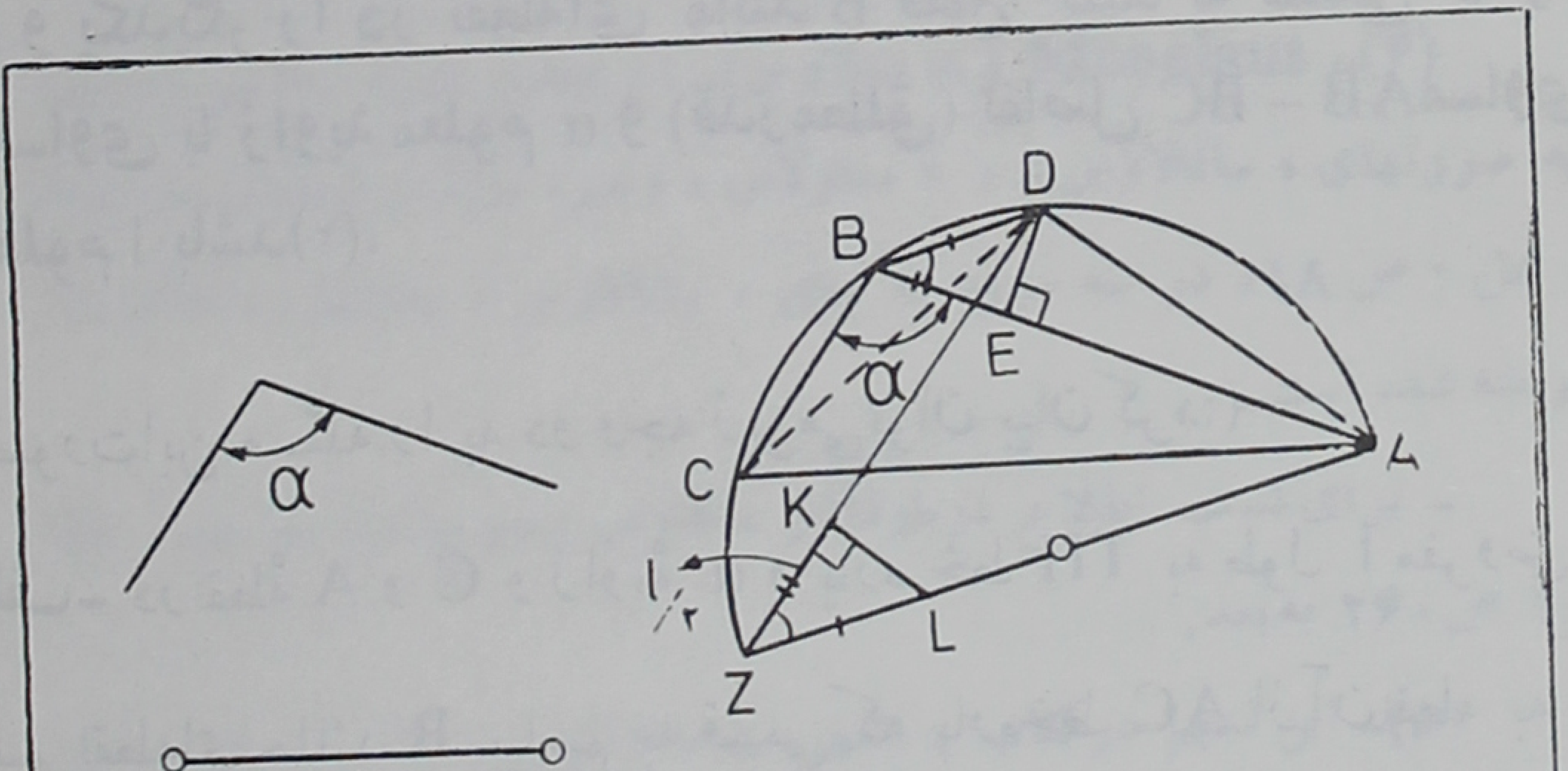
الف- در نقطهٔ A و C و زاویهٔ α و پاره خط TH به طول l مفروض است می‌خواهیم نقطه‌ای مانند B بیابیم به قسمی که پاره‌خط AC از آن نقطه به زاویهٔ α دیده شود و قدرمطلق تفاضل دوپاره خط AB و BC مساوی با l باشد .

ب- ازمثلث ABC زاویهٔ B و ضلع AC و «تفاضل دوضلع دیگر معلوم است. آن مثلث را رسم کنید.(۳))

راه حل اول مسئلهٔ دوم از استاد(۴)**-** نقاط A و C را به هم وصل کرده کمان درخور زاویهٔ α نظیر پاره‌خط AC را رسم می کنیم(۵) و وسط آن کمان را نقطهٔ D می‌نامیم و کمان ADC را تا نیمدایره کامل می کنیم تا نقطهٔ Z به‌دست آید(۶). و پاره خطهای AD و DZ و AZ (= قطر دایره) را رسم می کنیم.

سپس روی ZD ابتدا از Z پاره خط ZK را مساوی با نصف طول مفروض l جدا می کنیم ($ZK = \frac{l}{۲}$) و از نقطهٔ K عمود KL را بر ZA اخراج می نماییم (نقطهٔ L روی ZA واقع است). آن گاه وتر DB را مساوی با ZL اختیار کرده (نقطهٔ B باید روی کمان DC واقع شود) و نقطهٔ B را به نقاط A و C وصل می کنیم.

می گوییم دراین صورت $AB - BC = l$. (و $\widehat{ABC} = \alpha$. یعنی در واقع AB و AC جواب مسئله اند) .



(شکل ۵۷)

برهان – از نقطهٔ D عمود DE را بر AB فرود می آوریم. دو مثلث DEB و LKZ در رأسهای E و K قائم الزاویه هستند. و دو زاویهٔ DBE و DZA که هر دو محاطی و روبه روی کمان AD هستند متساویند. و از طرف دیگر وتر BD را مساوی با ZL اختیار کردیم. پس این دو مثلث در حالت وتر و یک زاویهٔ حاده متساویند (۷). بنابراین BE = ZK و چون $ZK = \frac{l}{۲}$ پس $BE = \frac{l}{۲}$

اما نظر به قضیهٔ اول نقطهٔ E وسط خط شکستهٔ ABC است و داریم [۸] :

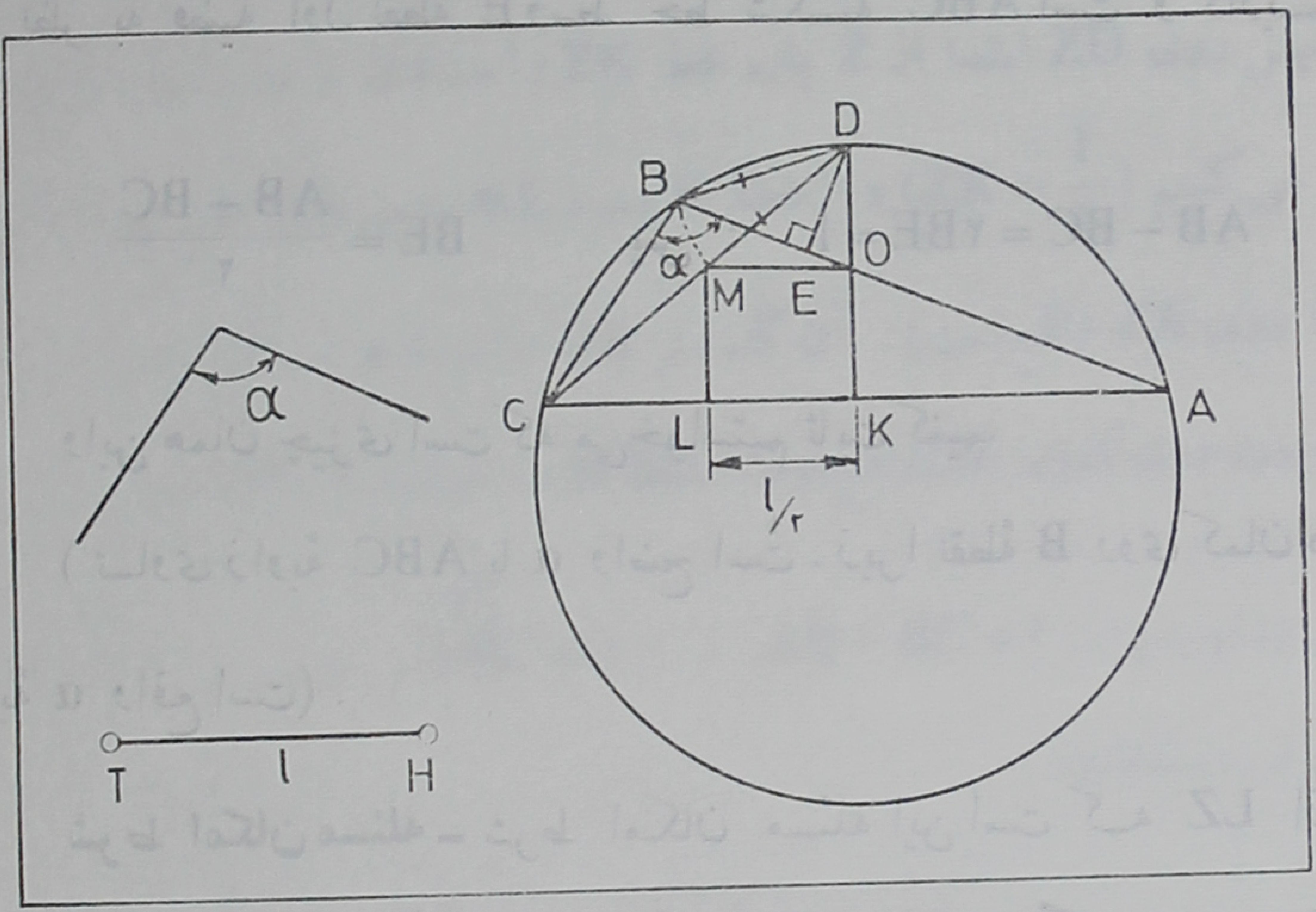
$$BE = \frac{AB - BC}{۲} \qquad \text{پس :} \qquad AB - BC = ۲BE = l$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(تساوی زاویهٔ ABC با α واضح است . زیرا نقطهٔ B روی کمان در خور زاویهٔ α واقع است) .

شرط امکان مسئله ـ شرط امکان مسئله این است که LZ از AD (= CD) کوچکتر نباشد[۹]. (زیرا اگر LZ از CD بزرگتر باشد وقتی وتر DB را مساوی با ZL رسم کنیم نقطهٔ B در خارج کمان BD واقع خواهد شد) .

راه حل دوم مسئلهٔ دوم از استاد[۱۰] ـ نقاط A و C را به هم وصل کرده کمان درخور زاویهٔ α نظیر پاره خط AC را رسم می کنیم و وسط آن را نقطهٔ D می‌نامیم و D را به C وصل می کنیم واز نقطهٔ D عمود DK را بر AC فرود می‌آوریم و (مطابق باشکل) پاره خط KL را روی AC مساوی با $\frac{1}{۲}$ جدا می کنیم و از نقطهٔ L خط LM را به موازات DK و از نقطهٔ M (که بر DC واقع‌است) MO را به موازات KL رسم می کنیم (نقطهٔ O روی DK واقع‌است). سپس وتر DB را مساوی با DM اختیار کرده (نقطهٔ B باید روی کمان DC واقع شود) و پاره خط های AB و BC را رسم می کنیم[۱۱] . (خطهای AB و BC جواب مسئله‌اند) .



(شکل ۵۸)

برهان – از نقطهٔ D عمود DE را بر AB فرود می آوریم واضح است که دو مثلث DBE و DCK متشابه‌اند. زیرا دو زاویهٔ DBE و DCK هر دو محاطی و روبه روی کمان AD واقع‌اند و هریك از دو زاویهٔ DEB و DKC قائمه‌اند. و چون MO با CK موازی است مثلث DMO نیز با مثلث DBE متشابه است.

اما DM = DB پس دو مثلث DMO و DBE متساویند (۱۲).

بنابراین MO = BE . اما MO = KL پس $BE = KL = \frac{1}{۲}$.

از طرف دیگر BE مساوی با نصف AB – CB است(۸) پس:

۲BE = AB – BC و بنابراین : AB – BC = l

و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ دوم :

(۱) - عل ۱۹ : سوتر A : ص ۳۳ و صفحهٔ ۶۹ - چد : ص۵۱ - چم : ص۹۲ .

(۲)- این‌مسئله درنسخهٔ «عل» چنین بیان‌شده‌است: « اخراج خطین من نقطتین مفروضتین یحیطان‌بزاویة مفروضه‌ویکون فضل‌احد هماعلی‌الاخر مساویالخط مفروض‌لی» .

(۳)- راه حل دیگری‌ازاین مسئله را درکتاب « حل‌المسائل هندسه» (تألیف صفاری - قربانی) جلداول صفحهٔ۱۱۹ شماره ۲۳۴ خواهید یافت .

(۴)- استاد خود به صراحت ادعاکرده است‌که این‌راه‌حل ازاوست. چه درآخرصورت مسئله چنانکه در یادداشت شمارهٔ (۲) دیده می‌شودآورده است: «... لخط مفروض‌لی» (یعنی‌ازمن) .

(۵)- رجوع کنید به‌کتاب «نه‌مقالهٔ هندسه» ، مقالهٔ‌دوم، صفحهٔ ۸۹ (کمان درخوریك زاویه) .

(۶)- معلوم نیست چرا استاد برای ترسیم مثلث قائم‌الزاویهٔ ZKL نقطهٔ Z را درامتدادکمان DC گرفته است (به‌قسمی‌که ADCZ نیمدایره باشد) . درصورتی‌که می‌توانست ، همچنانکه در راه حل دوم‌کرده است ، به‌جای‌نقطهٔ Z مثلانقطهٔ C را اختیارکند و ZK را مساوی با $\frac{1}{۲}$ روی CD جدا نماید و ازK عمودی برCK اخراج کند تا AC را در نقطهٔ L قطع نماید .

(۷)- استاد ابتدا،مطابق با رسم‌قدما، تشابه‌دومثلث DEB وLKZ را نشان‌داده وسپس، ازاینکه درآن دو مثلث BD وZL متساویند تساوی آنها را نتیجه‌گرفته است .

(۸)- مطابق با قضیهٔ اول‌داریم : $AE = EB + BC$

چون به دوطرف این تساوی مقدار EB را بیفزاییم حاصل می‌شود:

$$AE + EB = ۲EB + BC$$

و یا :

$$AB = ۲EB + BC$$

و از آنجا:

$$EB = \frac{AB - BC}{۲}$$

(۹)- سوتر شکل مربوط به این قسمت را مطابق با شکل متن عربی رسم نکرده (←«سوتر A» : ص۳۳ شکل۳۱) . وناچار شده است این شرط را تغییر دهد (←سوتر A: ذیل صفحهٔ ۳۴). اما شکل متن عربی و شرطی که استاد بیان کرده است درست است .

(۱۰)- این راه‌حل نیز از استاد است زیرا در آغاز آن (در نسخهٔ: عل) آمده است : «طریق آخر فی ذلك لی» .

(۱۱)- می‌توان ثابت کرد که AB از نقطهٔ O می‌گذرد .

(۱۲)- در اینجا باز مانند آنچه در یادداشت شمارهٔ (۶) گفتیم استاد ابتدا تشابه دو مثلث DMO و DBE را نشان داده و سپس از تساوی MO = BE تساوی دو مثلث مذکور را نتیجه گرفته‌است .

مسئلهٔ سوم (۱) **- ترسیم دو خط راست که از دو نقطهٔ معلوم A و C بگذرند ویکدیگر را در نقطه‌ای مانند B قطع کنند به قسمی کــه زاویهٔ ABC مساوی با زاویهٔ معلوم α وحاصل‌ضرب $AB \times BC$ مساوی با مربع طول معلوم k باشد**(۲) .

(صورت این مسئله را به دووجه زیر نیز می‌توان بیان کرد :

الف- دو نقطهٔ A و C وزاویهٔ α وپاره‌خطی به‌طول معلوم k مفروض است.

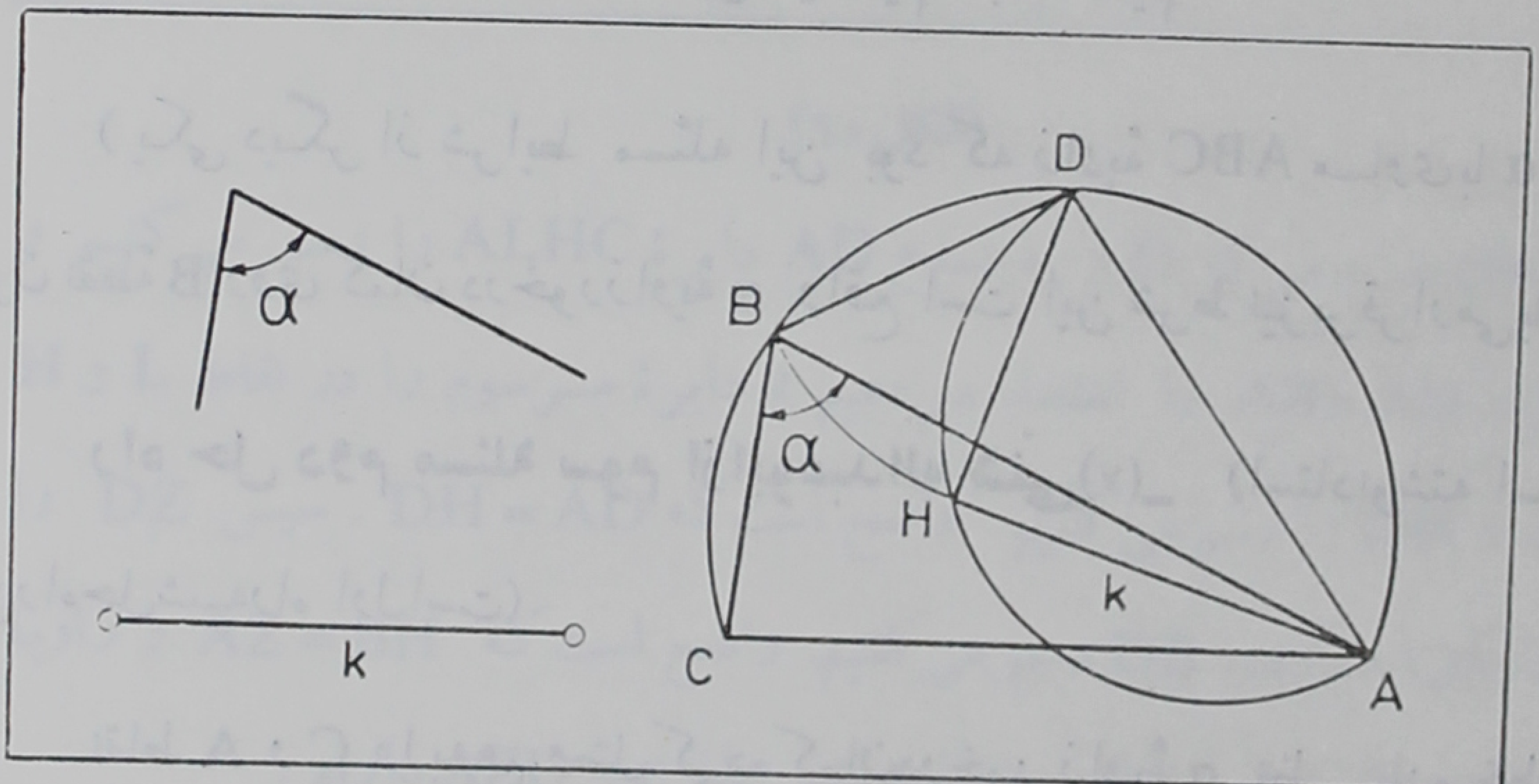
می‌خواهیم نقطه‌ای مانند B بیابیم به قسمی که پاره‌خط AC از آن نقطه به زاویهٔ α دیده شود و حاصل ضرب $AB \times BC$ مساوی k^2 باشد.

ب - ازمثلث ABC زاویهٔ B وضلع AC وحاصل‌ضرب دوضلع دیگر معلوم است. آن مثلث را رسم کنید(۳).

راه حل اول مسئلهٔ سوم از استاد(۴) - نقاط A و C را به‌هم‌وصل کرده کمان‌درخورزاویهٔ α نظیر پاره‌خط AC رارسم‌می کنیم(۵) و وسط آن کمان‌رانقطهٔ D می‌نامیم وD رابه A وصل‌می کنیم. سپس به‌قطر AD نیمدایره‌ای(مطابق باشکل) رسم کرده درآن وترAH را مساوی با طول k می کشیم(۶)ونقاط D وH را به‌هم وصل می کنیم. آنگاه در کمان درخور مرسوم وتر DB را مساوی با DH اختیار کرده‌پاره خطهای AB و BC را رسم می کنیم ومی گوییم:

$$AB \times BC = k^2$$

(و $\widehat{ABC} = \alpha$ یعنی در واقع AB و BC جواب مسئله‌اند).



(شکل ۵۹)

برهان - نظر به‌قضیهٔ دوم داریم :

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + AB \times BC$$

بنابراین : $\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = AB \times BC$ (۱)

اما (در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH) :

$$\overline{AD}^2 - \overline{DH}^2 = \overline{AH}^2$$

و چون $DH = BD$ پس :

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AH}^2 \quad (۲)$$

از دوتساوی (۱) و (۲) حاصل می‌شود :

$$\overline{AH}^2 = AB \times BC$$

و چون $AH = k$ پس : $AB \times BC = k^2$

و این‌همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

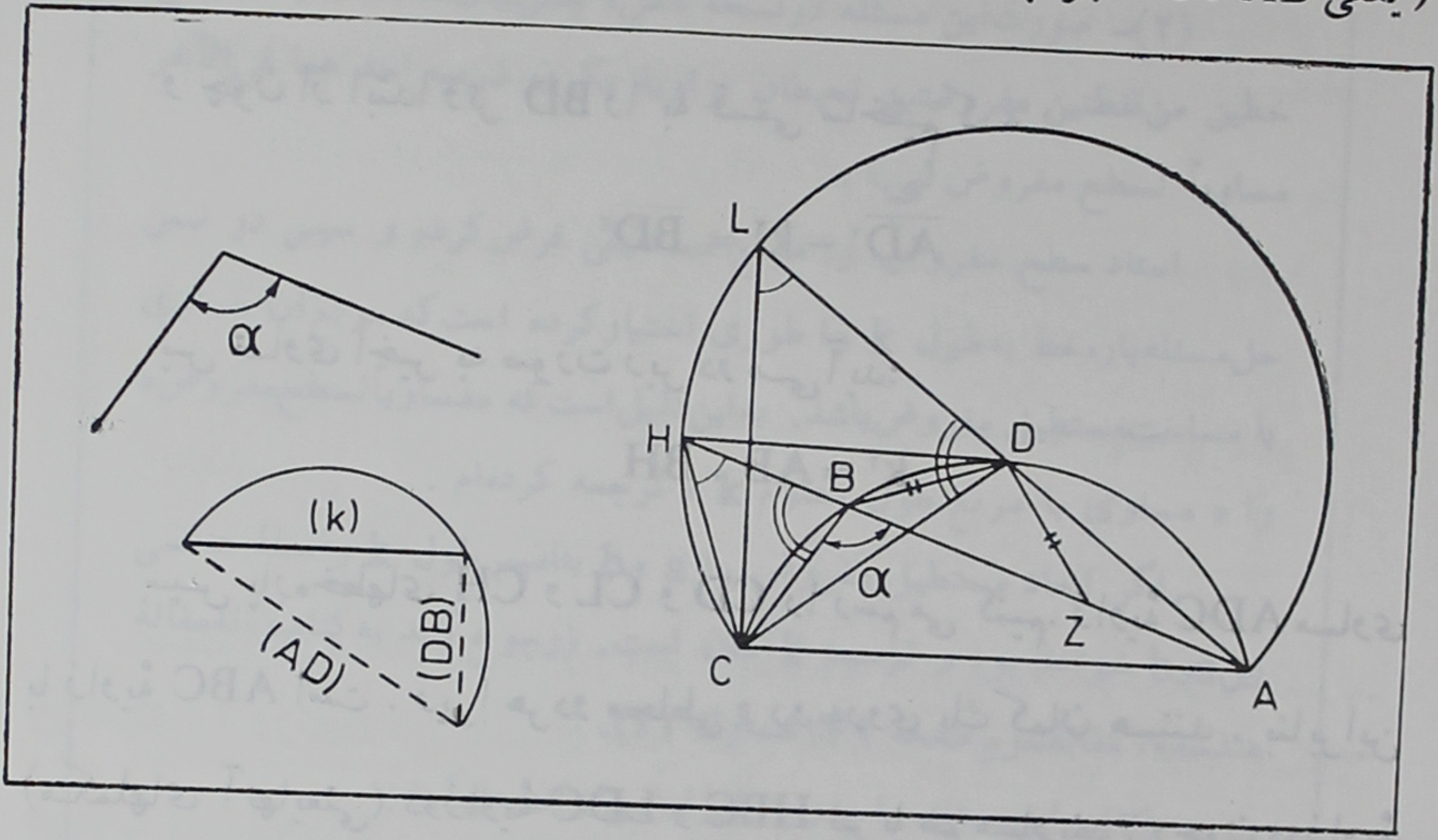
(یکی دیگر از شرایط مسئله این بود که زاویهٔ ABC مساوی با α باشد. چون نقطهٔ B روی کمان درخورزاویهٔ α واقع است این شرط نیز برقرارمی‌باشد) .

راه حل دوم مسئلهٔ سوم ازابوعبداله شنّی(۷)ـ (استادنوشته است که این راه‌حل‌شبیه‌راه اول‌است).

نقاط A و C را به‌هم وصل کرده کمان‌درخور زاویهٔ α نظیر پاره خط AC را رسم مـی کنیم ونقطهٔ A را به وسط کمان $\widehat{AC}$ که‌آن را D مـی‌نامیم وصل

می نماییم و فرض می کنیم که k از AD کوچکتر باشد و گرنه حل مسئله ممکن نخواهد بود .

سپس وتر DB را قسمی رسم می کنیم که $\overline{DB}^2 = \overline{AD}^2 - k^2$ باشد و نقطهٔ B را به نقاط A و C وصل می کنیم و مـی گوییم $AB \times BC = k^2$ (یعنی AB و BC جواب مسئله‌اند).



(شکل ٦٠)

برهان – به مرکز D و به شعاع AD دایرهٔ ALHC را رسم می کنیم و پاره خطهای AD وAB را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ مـرسوم را در نقاط L و H قطع کنند و DH را رسم می کنیم . واضح است که DH = AD . سپس DZ را (مطابق باشکل) مساوی با DB رسم می کنیم. واضح است که AZ = BH و زاویهٔ AZD منفرجه است . بنا براین درمثلث منفرج‌الزاویهٔ AZD داریم :

$$\overline{AD}^2 = \overline{AZ}^2 + \overline{DZ}^2 + AZ \times ZB$$

(زیرا ZB مساوی بادوبرابر تصویر DZ روی امتداد ضلع **AZ** است[۸]).

و این تساوی را می‌توان چنین نوشت:

$$\overline{AD}^2 = \overline{DZ}^2 + AZ(AZ + ZB) = \overline{DZ}^2 + AZ \times AB$$

و چون $AZ = BH$ و $DZ = BD$

پس داریم: $\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + BH \times AB$

و چون از ابتدا وتر BD را به قسمی ساختیم که:

$$\overline{AD}^2 - k^2 = \overline{BD}^2$$

پس تساوی اخیر به صورت زیر در می‌آید:

$$k^2 = AB \,.\, BH$$

سپس پاره‌خطهای CH و CL و CD را رسم می کنیم. زاویهٔ ADC مساوی با زاویهٔ ABC است. زیرا هردو محاطی و روبه‌روی یك کمان هستند. بنابراین (مکملهای آنهایعنی) دوزاویهٔ LDC و HBC نیز با هم مساویند. وچون دوزاویهٔ ALC و AHC در دایرهٔ بزرگتر محاطی و روبه‌روی یك کمان هستند متساویند. پس دومثلث LDC و HBC متشابه‌اند[۹]. اما مثلث LDC متساوی‌الساقین است پس مثلث HBC نیزمتساوی الساقین می‌باشد و داریم: $BH = BC$

پس تساوی $k^2 = AB \,.\, BH$ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$AB \times BC = k^2$$

واین همان‌چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(تساوی زاویهٔ ABC با α واضح است . زیرا نقطهٔ B روی کمان درخور زاویهٔ α واقع است) .

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ سوم :

(۱)- عل: ص۲۰- سوتر A: ص۳۴- چد:ص۵۳- چم: ص۹۵.

(۲)- صورت این مسئله درنسخهٔ «عل» چنین بیان‌شده است: «اخراج خطین من نقطتین مفروضتین تحیطان بزاویة یکون ضرب احد هما فی‌الآخر مساویاً لسطح مفروض لی» .

استاد سطح مفروض را مربع مستطیلی فرض کرده و سپس در ضمن حل مسئله پاره‌خط به‌طول k را طوری اختیارکرده است که مربع آن مساوی با مساحت مستطیل مفروض باشد. به‌این دلیل است که «مساویاً لسطح مفروض» را « مساوی با مربع طول معلوم k » ترجمه کرده‌ام .

اگر ابعاد مستطیل مفروض را a و b بنامیم طول k واسطهٔ هندسی بین a و b خواهد بود و ترسیم k آسان است. (رجوع کنید به‌کتاب «نه‌مقالهٔ هندسه»، مقالهٔ سوم صفحهٔ ۱۴۹ شمارهٔ ۳۲۷).

(۳)- این‌مسئله را به‌وجه زیرنیزمی‌توان حل کرد:

رأس B روی کمان درخورزاویهٔ معلوم B نظیر پاره‌خط AC واقع است. بنابراین قطر d دایرهٔ محیطی مثلث معلوم است. ازطرف دیگر حاصل‌ضرب $AB \times BC$ یعنی k^2 مساوی است با حاصل‌ضرب d درارتفاع نظیر رأس B که‌آن را h می‌نامیم . (رجوع کنید به‌کتاب «نه‌مقالهٔ هندسه» مقالهٔ سوم صفحهٔ ۱۷۰ شمارهٔ ۲۹۹) پس $h = \frac{k^2}{d}$ یعنی ارتفاع نظیر رأس B نیز معلوم است . بنابراین ازمثلث ABC زاویهٔ B وضلع AC وارتفاع نظیر رأس B دردست‌است ومی‌توان آن‌را ساخت. رجوع کنید به‌کتاب «حل المسائل هندسه» (تألیف صفاری ـ قربانی) جلد اول صفحهٔ ۱۱۱ شمارهٔ ۲۲۲ .

(۴)- استاد خود در پایان مسئله (در نسخهٔ «عل») اضافه کرده است: لی (یعنی از من).

(۵)- رجوع کنید بـه کتاب «نه‌مقالهٔ هندسه» مقالهٔ دوم صفحهٔ ۸۹ (کمان درخوریك زاویه).

(۶) - شرط امکان مسئله این است که k کوچکتر از AD باشد. (این شرط را استاد درراه حل‌دوم این‌مسئله از قول ابوعبدالله‌الشنّی ذکر کرده است.)

(۷)- رجوع کنید به «بیرونی‌نامه» ص ۵۳۰

(۸)- رجوع کنید به کتاب «نه‌مقالهٔ هندسه» مقالهٔ سوم، صفحهٔ ۱۷۵ شمارهٔ ۳۰۶.

(۹)- درنسخهٔ «عل» (ص۲۱ سطر دوازدهم) اسم‌مثلث **حبج** ازقلم افتاده‌است.

مسئلهٔ چهارم(۱)- ترسیم دوخط راست که ازدونقطهٔ‌معلوم A و C بگذرند ویکدیگررا درنقطه‌ای مانند B قطع کنند به قسمی که زاویهٔ ABC مساوی بازاویهٔ معلوم α ونسبت $\frac{AB}{BC}$ مساوی با نسبت‌معلوم $\frac{1}{k}$ باشد (۲).

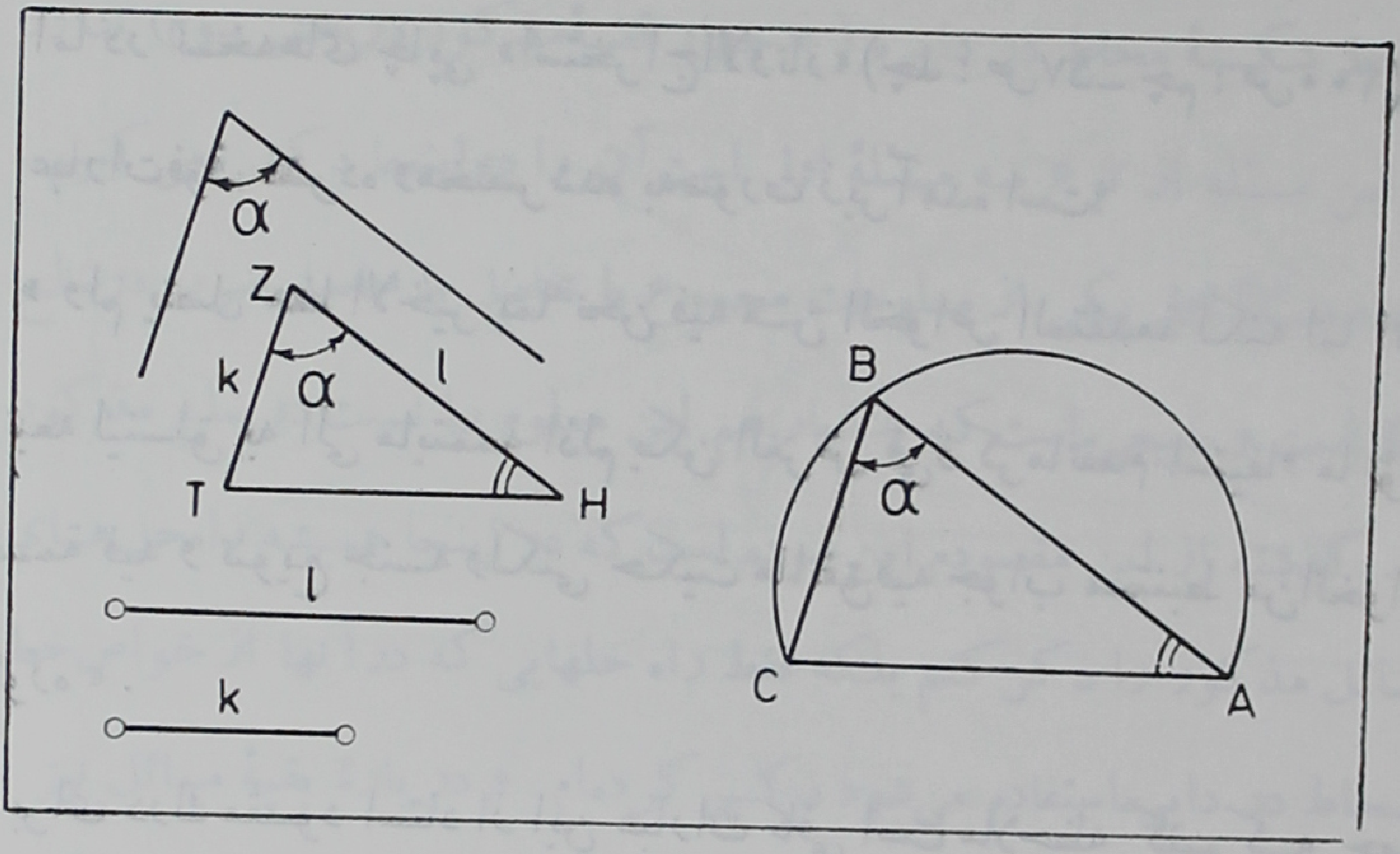
(صورت‌این مسئله را به دو وجه زیر نیزمی‌توان‌بیان کرد:

الف- دونقطهٔ A و C و زاویهٔ α ونسبت $\frac{1}{k}$ مفروض‌است. می‌خواهیم نقطه‌ای مانند B بیابیم به قسمی که پاره‌خط AC ازآن نقطه به‌زاویهٔ α دیده شود و نسبت $\frac{AB}{BC}$ مساوی با $\frac{1}{k}$ باشد.

ب- ازمثلث ABC زاویهٔ B وضلع AC ونسبت دوضلع دیگرمعلوم است.

آن مثلث را رسم کنید(۳)).

راه‌حل- زاویه‌ای مساوی با زاویهٔ α ساخته رأس آن را Z می‌نامیم و روی دو ضلع آن دو پاره خط ZH و ZT را به‌ترتیب مساوی با l و k جدا و پاره خط TH را رسم می کنیم. سپس کمان درخـور زاویهٔ α نظیر پاره خـط AC را رسم کرده زاویهٔ CAB را مساوی با زاویهٔ THZ مـی‌سازیم و پاره خط BC را رسم می کنیم و می گوییم مسئله حل شده است (یعنی درواقع خطهای BA و BC جواب مسئله‌اند).



(شکل ۶۱)

برهان- زاویهٔ TZH مساوی با زاویهٔ ABC و زاویهٔ THZ مساوی با زاویهٔ CAB است. بنابراین دو مثلث ABC و HZT متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{HZ}{ZT}=\frac{l}{k}$$

پس خطوط راست BA و BC جواب مسئله‌اند.

تبصره - در پایان حل این مسئله در نسخهٔ خطی «عل» (صفحهٔ۲۲) عبارات زیر آمده است :

«وهذا الاخیر وان لم یتصل بخواص الخط المنحنی فانی جئت به لینسلق به مما ذکرته من هذه المسائل الی سایر انواعها التی تؤدی الیها القسمهٔ . فلم یکن الغرض فی ذکرها استیفاء جمیعاً حتی اتعرض منها بجمیع مایحتمله تنویع القسمة . لکنی حکیت منها مااتفق لی الجواب عنه مستنبطا من خواص تلك الدعاوی المتقدمه کما سیأتی علی جمیع ما اتفق من ذلك لی ولغیری» .

اما در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (چد : ص۵۷- چم : ص۱۰۰) عبارات فوق فشرده ومختصر شده به‌صورت زیر آمده است:

« ولم یتصل هذا الاخیر بما نحن فیه من الخواص المتقدمة لکنه لما اتصل بالفن تبعه لینسلق به الی مایتممه اذلم یکن الغرض فی ذکر ماتقدم استیفاء ما تؤدی الیه القسمة فیه و تنویع جنسه ولکنی حکیت مااتفق فیه جواب مستنبط من الخواص المذکوره» .

برای درك مقصود استاد از این عبارات کافی است ملاحظه کنیم که چهار نخستین مسئله را که شرح آنها گذشت می‌توان یکجا به‌صورت زیر مطرح کرد:

از مثلث ABC ضلع AC و زاویهٔ روبه‌روی آن B ویکی دیگر ازمعلومات زیر در دست است می‌خواهیم آن مثلث را رسم کنیم :

اول : مجموع دو ضلع $AB + BC$

دوم : تفاضل دو ضلع $|AB - BC|$

سوم : حاصل‌ضرب دوضلع $AB \times BC$

چهارم : نسبت دوضلع $\frac{AB}{BC}$

استاد این مسئله را درسه حالت اول با استفاده از خواص خط شکستهٔ محاط در دایره حل کرده اما راه حلی که برای حالت چهارم ذکر کرده است ربطی به خواص مذکور ندارد.

به این دلیل است که می گوید : اگرچه مسئلهٔ اخیر (= مسئلهٔ چهارم) ربطی به خواص خط شکستهٔ محاط در دایره (= چهار قضیهٔ مذکور در بخش سوم) ندارد ولی چون این مسئله از نوع سه مسئلهٔ اول است آن را دراینجا ذکر می کنیم. (زیرا درسه مسئلهٔ اول یکی از معلومات مجموع یا تفاضل یا حاصل ضرب دوضلع AB و BC است و طبیعی است که یك بار هم این معلوم را نسبت دو ضلع مذکور بگیریم). گذشته از این مقصودم این نبوده است که در اینجا همیشه راه‌حل‌های ممکن مسائل مذکور را ذکر کنم بلکه فقط راه حلهایی که درآنها از خواص خط شکستهٔ محاط در دایره استفاده می‌شود ذکر کرده‌ام. و در بارهٔ بقیهٔ مسائل نیز، خواه راه‌حل آنها ازمن باشد وخواه نباشد، نیز همین کاررا کرده‌ام.

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ چهارم :

(۱)- عل: ص۲۱- سوترA: ص۳۶- چد: ص ۵۶- چم: ص۹۹

(۲)- صورت این مسئله در نسخهٔ « عـل » چنین بیان شده است :

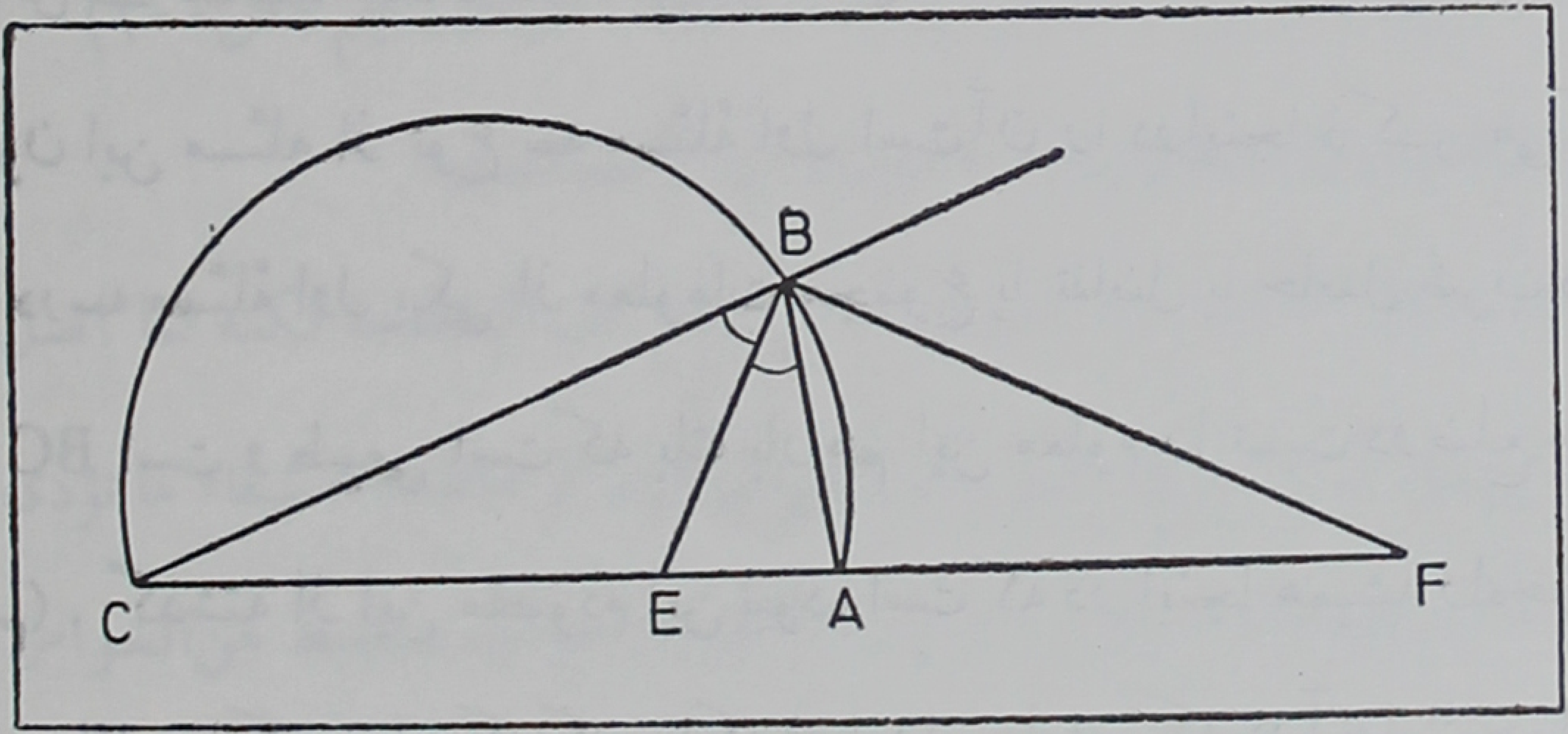
«اخراج خطین من نقطتین مفروضتین تحیطان بزاویة مفروضة وتکون نسبة

احد هماالی الاخر کنسبة معلومة» .

(۳)- این مسئله را به طریق زیر نیز می توان حل کرد:

چون ضلع AC معلوم است کافی است دومکان هندسی برای رأس B بیابیم . رأس B ازیک طرف روی کمان درخور زاویهٔ معلوم B نظیر پاره خط BC واقع است. ازطرف دیگر اگر مسئله را حل شده فرض کنیم و پاهای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ B را روی ضلع AC نقاط E و F بنامیم می دانیم که

$$\frac{EA}{EC}=\frac{FA}{FC}=\frac{BA}{BC}$$



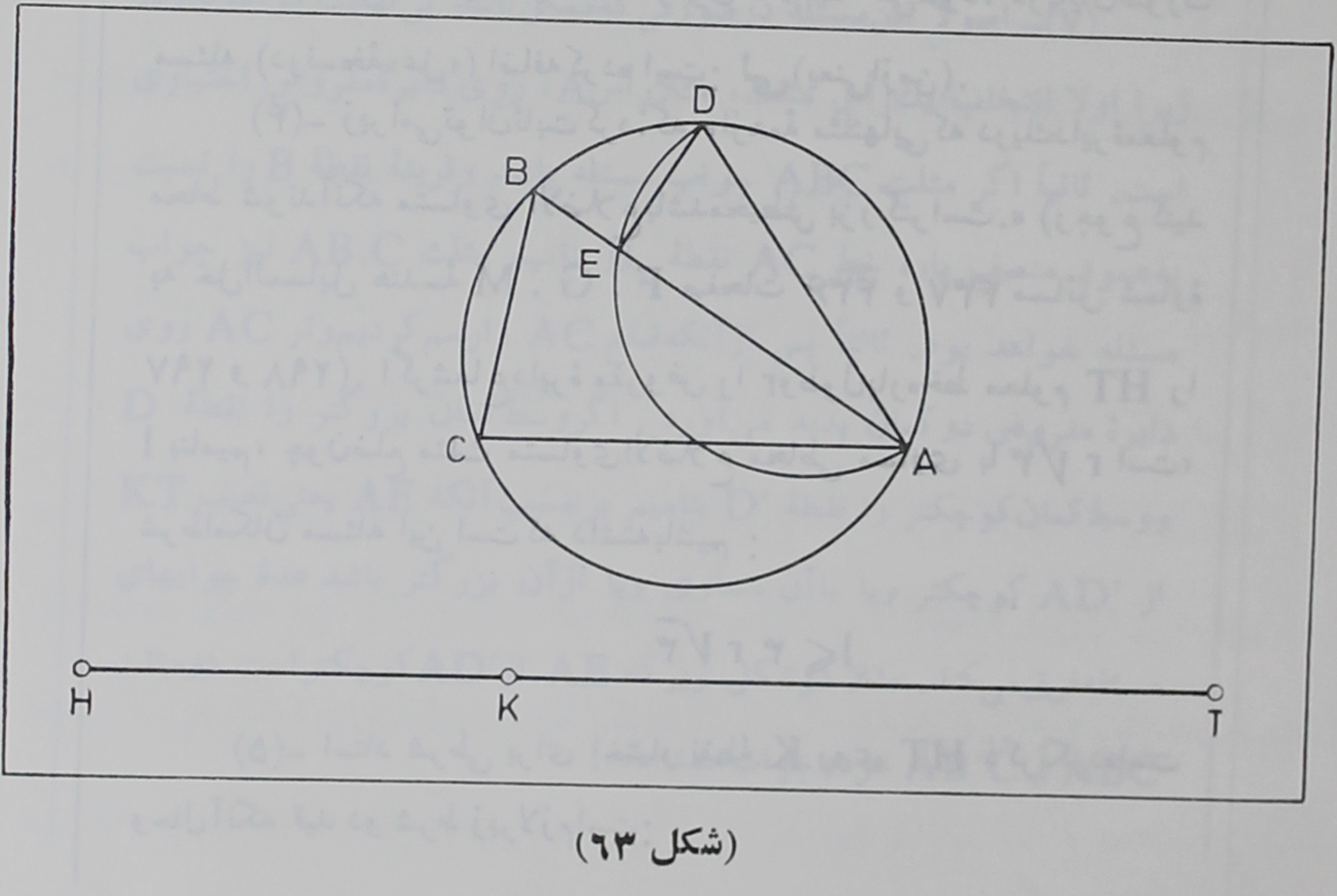
(شکل ۶۲)

یعنی نقاط E و F نقاطی ازخط راست AB هستند که پاره خط AC را به نسبت (نقصانی واضافی) $\frac{BA}{BC}$ تقسیم می کنند و چون این نسبت معلوم است می توان نقاط E و F را یافت . نقطهٔ B روی دایرهٔ به قطر EF واقع است. پس نقطهٔ B در فصل مشترک دومکان مذکور قراردارد و مسئله حل است.

مسئلهٔ پنجم(۱)- محاط کردن مثلثی دردایره‌ای مفروض به‌قسمی که مجموع اضلاع آن مساوی با پاره خط معلوم HT باشد (۲).

راه حل ازاستاد (۳)- باید طول HT از محیط مثلث متساوی الاضلاعی که دردایرهٔ مفروض محاط شود بزرگتر نباشد (۴)(تاحل مسئله ممکن گردد.)

روی پاره خط HT نقطهٔ دلخواهی مانند K اختیار می کنیم(۵). و وتر AC را در دایرهٔ مفروض مساوی با HK رسم می کنیم. سپس کمان AC رادر نقطهٔ D نصف کرده (۶) نقطهٔ A را به نقطهٔ D وصل می‌نماییم. آنگاه به قطر AD نیمدایره‌ای (در داخل دایرهٔمفروض) رسم می کنیم ووتر AE را درآن نیمدایره مساوی با نصف پاره خط KT می‌سازیم. سپس AE را امتداد می‌دهیم تا کمان AC را درنقطهٔ B قطع کندونقطهٔ B را به C وصل می کنیم. محیط مثلث ABC (که در دایرهٔمفروض محاط شده) مساوی‌با طول HT است(۷).



(شکل ۶۳)

برهان - پاره خط AC مساوی با HKاست . و پاره خط AE که (بنابر قضیهٔ اول) نصف طول خط شکستهٔ ABC است مساوی با نصف KT است. بنابراین همهٔ طول خط شکستهٔ ABC مساوی با KT است . پس محیط مثلث ABC مساوی با طول HT است .

واین‌همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشت‌های مربوط به‌مسئلهٔ‌پنجم:

(۱)- عل: ص ۲۲- سوترA: ص۳۷- چد:ص ۵۷ -چم: ص ۱۰۰

(۲)- صورت این مسئله در نسخهٔ «عل» چنین بیان شده است :

«عمل مثلث فی دایرة مفروضة یساوی مجموع اضلاعه خطاً مفروضاً **لی.**»

(۳)- استاد خود، چنانکه درفوق ملاحظه می‌شود، درپایان‌صورت مسئله (درنسخهٔ«عل») اضافه‌کرده است: **لی**(یعنی‌ازمن).

(۴)- زیرامی‌توان‌ثابت کرد: که «ازهمهٔ مثلثهایی‌که دریك‌دایرهٔ‌معلوم محاط شوندآنکه متساوی الاضلاع باشدمحیطش بزرگتراست.» (رجوع کنید به حل‌المسایل هندسهٔ F . G . M صفحات ۴۳۶ و ۴۳۷ مسائل شمارهٔ ۲۹۷ و ۲۹۸). اگرشعاع‌دایرهٔ مفروض را rوطول‌پاره‌خط معلوم HT را l بنامیم، چون‌ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی مساوی با $r\sqrt{۳}$ است، شرطامکان مسئله این است‌که داشته‌باشیم :

$$l \leqslant ۳\, r\sqrt{۳}$$

(۵)- استاد شرطی برای اختیار نقطهٔ K روی HT ذکرنکرده‌است وحال‌آنکه قید دو شرط زیرلازم‌است:

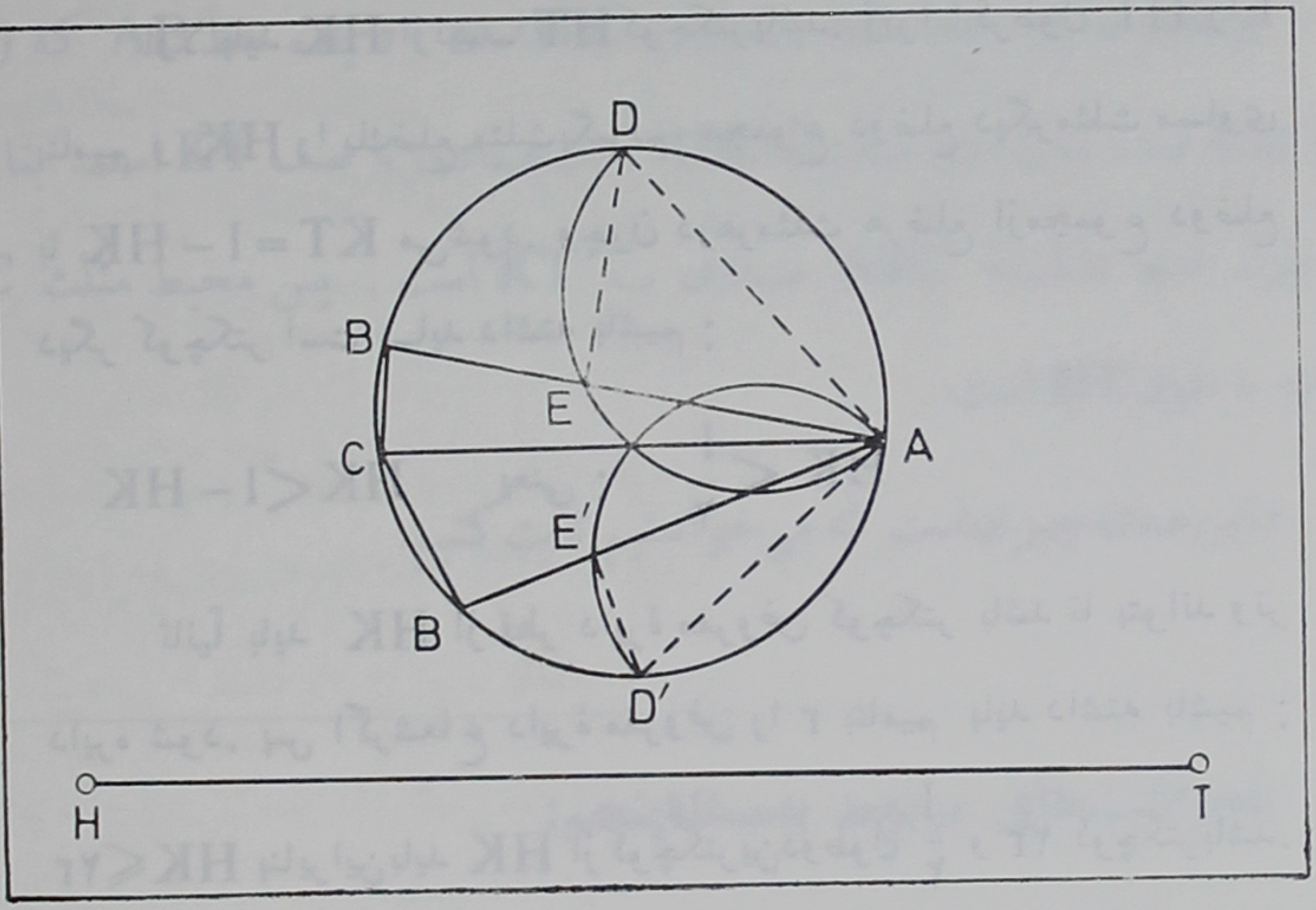
اولا باید HK از نصف HT کوچکتر باشد. زیرا اگر طول HT را l بنامیم و HK را یك ضلع مثلث بگیریم، مجموع دو ضلع دیگر مثلث مساوی با $KT = l - HK$ می‌شود. وچون درهرمثلث هرضلع ازمجموع دوضلع دیگر کوچکتر است باید داشته باشیم:

$$HK < l - HK \quad \text{یعنی :} \quad HK < \frac{l}{۲}$$

ثانیاً باید HK از قطر دایرهٔ مفروض کوچکتر باشد تا بتواند وتر دایره شود. پس اگرشعاع دایرهٔ مفروض را r بنامیم باید داشته باشیم: $HK \leqslant ۲r$ بنابراین باید HK ازکوچکترین دوطول $\frac{l}{۲}$ و ۲r کوچکتر باشد.

(۶)ـ وتر AC روی دایرهٔ مفروض دو کمان AC پدید می‌آورد. استاد نگفته است که کدام کمان را نصف می‌کنیم. رجوع کنید به قسمت سوم یادداشت زیر.

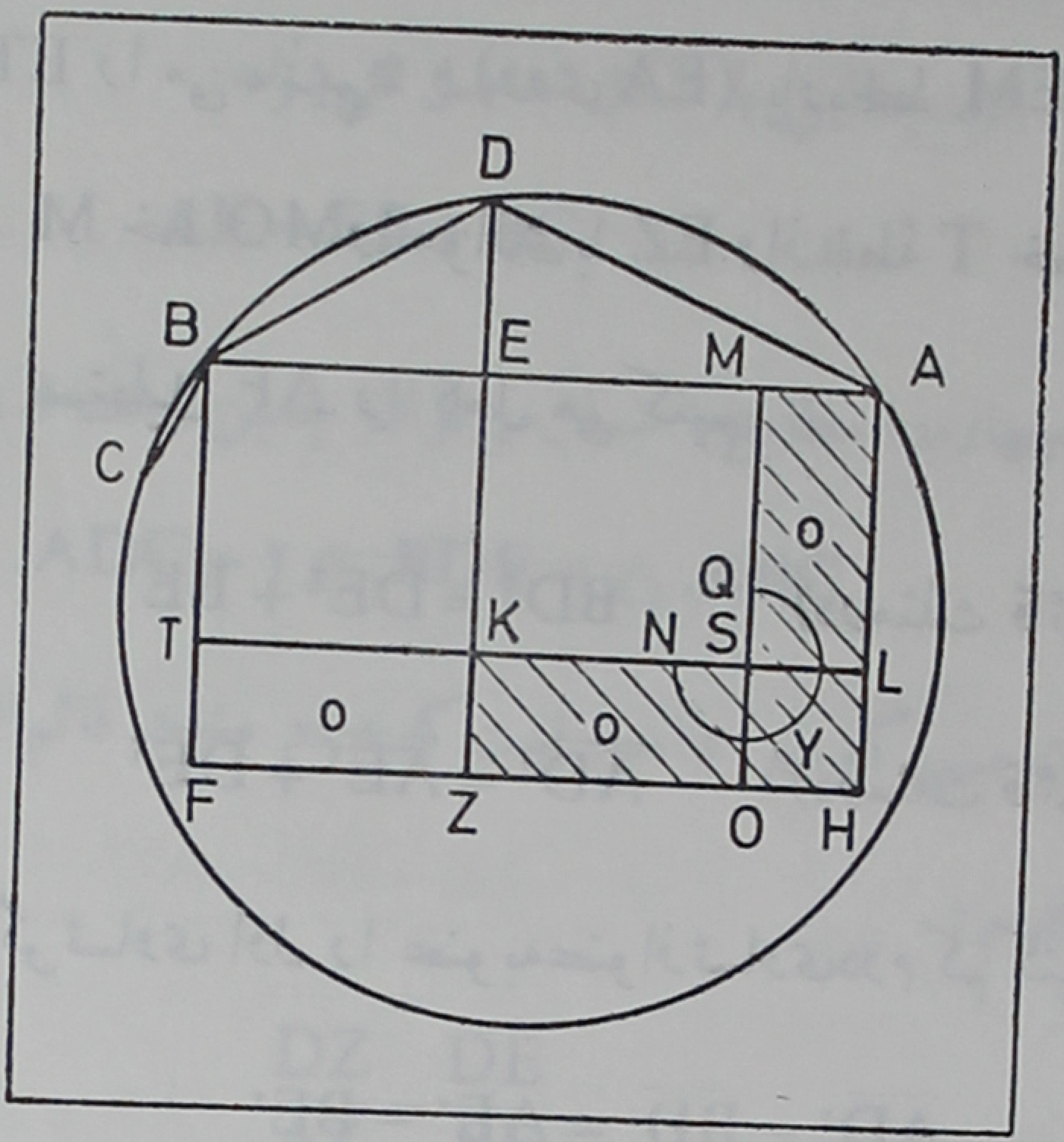
(۷)ـ اصولا این مسئله درصورتی که ممکن باشد بی‌نهایت جواب دارد. زیرا اولا انتخاب یك رأس مثلث، مثلا رأس A، روی دایرهٔ مفروض اختیاری است. ثانیاً اگر مثلث ABC جواب مسئله باشد وقرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به عمود منصف پاره خط AC نقطهٔ $B_۱$ بنامیم مثلث $AB_۱C$ نیز جواب مسئله خواهد بود. ثالثاً پس ازآنکه ضلع AC رارسم کردیم وتر AC روی دایرهٔ مفروض دو کمان پدید می‌آورد. اگروسط کمان بزرگتر را نقطهٔ D ووسط کمان کوچکتر را نقطهٔ D' بنامیم برحسب آنکه AE یعنی نصف KT از AD' کوچکتر ویا باآن مساوی ویا ازآن بزرگتر باشد عدهٔ جوابهای مسئله فرق می‌کند. مثلا درشکل زیر که AE از AD' کوچکتر است دومثلث ABC و $AB'C$ هردوجواب مسئله‌اند.



(شکل ۶۴)

مسئلهٔ ششم(۱)- برهان درستی دستور ارشمیدس دربارهٔ محاسبهٔ طول ارتفاعات مثلثهائی که اضلاع آنها معلوم باشد و محاسبهٔ پاره‌خطهایی که پای هر ارتفاع روی قاعدهٔ نظیر خود پدید می‌آورد(۲).

ارشمیدس گفته‌است(۳): «مربع یکی از اضلاع را از مربع ضلع دیگر کم کرده حاصل را بر قاعده تقسیم می کنیم. اگر آنچه را به این ترتیب به دست می‌آید به قاعده بیفزاییم و نصف آن را بگیریم طول پاره خط بزرگتری که پای ارتفاع روی قاعده پدید می‌آورد نتیجه خواهد شد. و اگر آن را از قاعده کم کنیم و نصف آن را بگیریم طول پاره‌خط کوچکتری که پای ارتفاع روی قاعده پدید می‌آورد به دست خواهد آمد.



(شکل ۶۵)

خلاصهٔ مطلب این است که اگر در مثلث ADB پای ارتفاع نظیر رأس D را روی AB نقطهٔ E بنامیم داریم(۴) :

$$AE = \frac{1}{2}\left(AB + \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB}\right)$$

و

$$BE = \frac{1}{2}\left(AB - \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB}\right)$$

برهان اول از استاد(۵)ـ مثلث ADB را در نظر گرفته ارتفاع AE (نظیر قاعدهٔ AB) ودایرهٔ محیطی مثلث را رسم می کنیم. وروی دایرهٔ محیطی کمان $\widehat{DC}$ را مساوی با کمان $\widehat{DA}$ جدا کرده BC را رسم می کنیم وروی AE مربع AZ

وروی BE مربع ET را می‌سازیم* و (روی EA) پاره‌خط EM را مساوی با EB جدا کرده از نقطهٔ M خط MO را موازی با EZ و از نقطهٔ T خط TKL را موازی با AB می کشیم و مستطیل AF را کامل می کنیم.

چون $\overline{BD}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{BE}^2$ (درمثلث قائم‌الزاویهٔBED)

و $\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2$ (درمثلث قائم‌الزاویهٔAED)

بنابراین(اگر تساوی اول را عضو به‌عضو از تساوی‌دوم کم کنیم) :

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$$

و واضح است که تفاضل $\overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$ مساوی با مساحت عَلَم QYN (یعنی‌مساحت قسمتی که روی شکل هاشورخورده‌است[۴]).

از طرف دیگر چون $TK = KS = SM$

و $TF = KZ = AM$

بنابراین‌مستطیل‌های TZ و KO و ML متساویند. پس:

مساحت‌عَلَم QYN = مساحت‌مستطیل TH

(واین‌مساحت‌چنانکه دیدیم مساویست‌با $\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2$)

اما چون : $AM = CB$

(زیرانقطهٔ E وسط خط شکسته ABC است و BE = EM)

* هرچهارضلعی به‌وسیلهٔ اسامی دررأس‌متقابل آن نامیده‌شده است.

از قضیهٔ اول مطابق با شکل حاصل می‌شود :

$$AE = EB + BC \quad (۱)$$

وقضیهٔ چهارم‌را مطابق با شکل‌می‌توان چنین‌نوشت (.△ یعنی‌مساحت مثلث):

$$\triangle.ADC - ۲\triangle.BDE = \triangle.ABC \quad (۲)$$

اکنون مـی گوییم: واضح است کـه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ DEB و DZA متشابهند وداریم:

$$\frac{DZ}{AZ} = \frac{DE}{BE} \quad (۳)$$

با ضرب کردن صورت ومخرج هریك از دونسبت فوق دریك مقدار مناسب می‌توان تساویهای زیررا نتیجه گرفت:

$$\frac{\overline{DZ}^{۲}}{DZ \times AZ} = \frac{DZ \times AZ}{AZ^{۲}} = \frac{\overline{DE}^{۲}}{DE \times BE} = \frac{DE \times BE}{BE^{۲}}$$

واز خواص نسبتهای متساوی حاصل می‌شود:

$$\frac{\overline{DZ}^{۲} - \overline{DE}^{۲}}{DZ \times AZ - DE \times BE} = \frac{DZ \times AZ - DE \times BE}{\overline{AZ}^{۲} - \overline{BE}^{۲}} \quad (۴)$$

اکنون مقادیرچهار جملهٔ تناسب(۴) را جداگانه حساب می کنیم

اولا ـ ازدومثلث قائم‌الزاویهٔ AED و AZD می‌توان صورت نسبت طرف چپ رابطهٔ (۴) را چنین نوشت :

$$\overline{DZ}^{۲} - \overline{DE}^{۲} = \overline{AD}^{۲} - \overline{AZ}^{۲} - (\overline{AD}^{۲} - \overline{AE}^{۲}) = \overline{AE}^{۲} - \overline{AZ}^{۲}$$

و یا $$\overline{DZ}^{۲} - \overline{DE}^{۲} = (AE + AZ)(AE - AZ) \qquad (۵)$$

و اگر محیط مثلث ABC را ۲p بنامیم چون نظر به قضیهٔ اول

$$AE = \frac{AB + BC}{۲} \quad \text{و} \quad AZ = \frac{AC}{۲}$$

معلوم می‌شود که : $$AE + AZ = \frac{AB + BC + AC}{۲} = p \qquad (۶)$$

و $$AE - AZ = \frac{AB + BC}{۲} - \frac{AC}{۲} = p - AC \qquad (۷)$$

و اگر مقادیر $(AE + AZ)$ و $(AE - AZ)$ را از روابط (۶) و (۷) در رابطهٔ (۵) قرار دهیم صورت نسبت طرف چپ تناسب (۴) چنین نوشته می‌شود:

$$\overline{DZ}^{۲} - \overline{DE}^{۲} = p(p - AC) \qquad (۸)$$

ثانیاً ـ وسطین تناسب (۴) با هم مساویند و می‌توان آنها را چنین نوشت ($\triangle$. یعنی مساحت مثلث) :

$$DZ \times AZ - DE \times BE = \triangle \times ADC - ۲\triangle \times BDE$$

ومقدار طرف راست تساوی فوق بنا بر قضیهٔ چهارم مساوی است با مساحت مثلث ABC. بنا بر این وسطین تناسب (۴) چنین نوشته می‌شود:

$$DZ \times AZ - DE \times BE = \triangle .ABC \qquad (۹)$$

ثالثاً ـ مخرج نسبت طرف راست تناسب (۴) را می‌توان چنین نوشت:

$$\overline{AZ}^{۲} - \overline{BE}^{۲} = (AZ + BE)(AZ - BE) \qquad (۱۰)$$

و اگرزاویهٔ B منفرجه باشد از تساوی (۲) نتیجه می‌شود :

$$BE = \frac{\overline{AD}^۲ - (\overline{AB}^۲ + \overline{BD}^۲)}{۲AB} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\overline{AD}^۲ - \overline{BD}^۲}{AB} - AB\right)$$

و در این حالت :

$$AE = AB + BE = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\overline{AD}^۲ - \overline{BD}^۲}{AB} + AB\right)$$

درهر صورت ملاحظه می‌شود که آنچه را استاد ثابت کرده است درواقع همان دستور محاسبهٔ مربع ضلع مقابل به زاویهٔ حاده یامنفرجه در مثلث دلخواه است .

۵ـ درپایان‌صورت مسئله چنانکه دریادداشت شمارهٔ (۲)دیده می‌شود ازقول استاد، درنسخهٔ «عل»، آمده‌است : **لی** (یعنی‌ازمن)

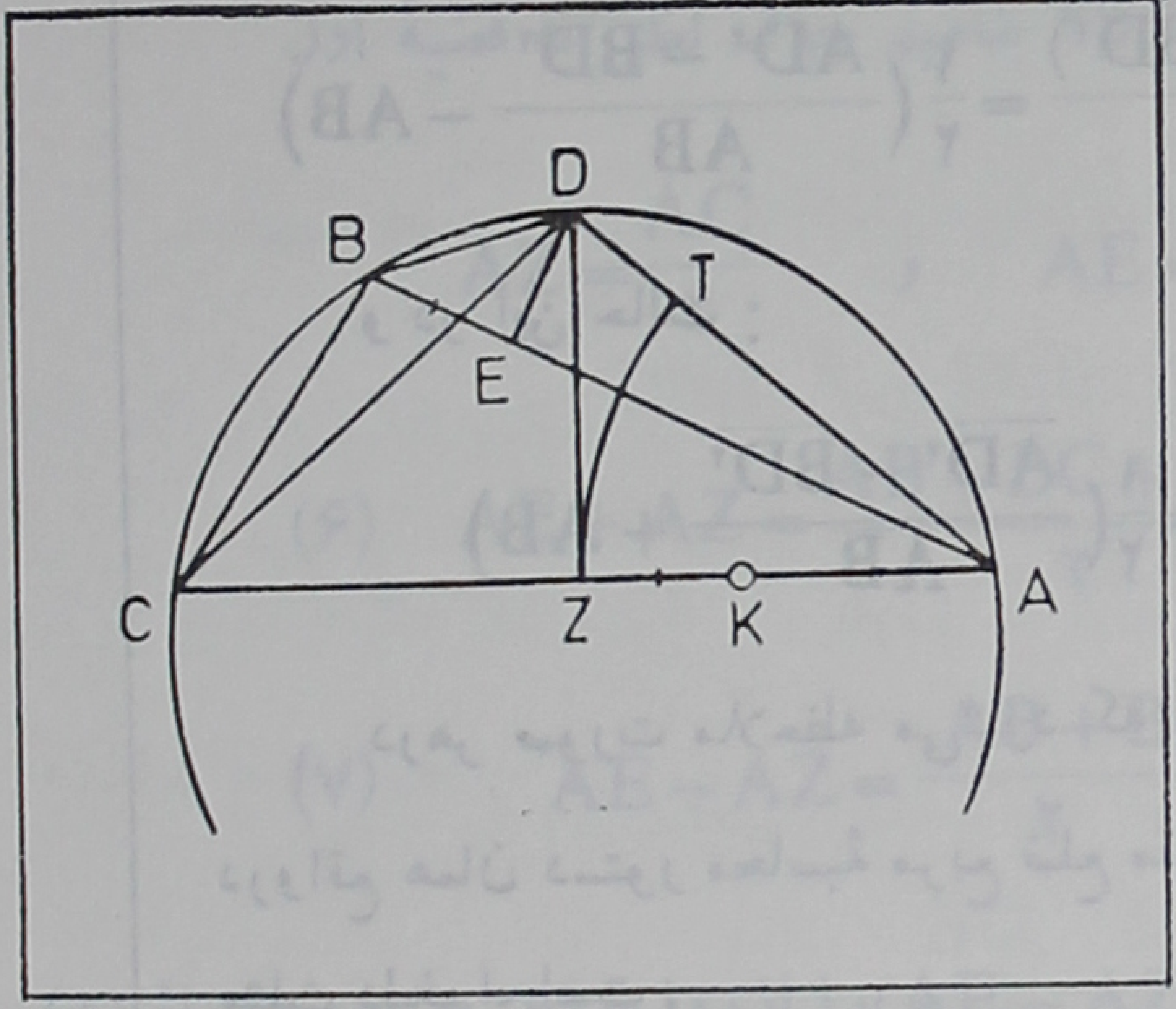
(۶)ـ استاد خود در بارهٔ برهان دوم، درنسخهٔ «عل» نوشته است .
« برهان‌ثان‌لی‌اخف من‌الاول »

(۷)ـ درنسخهٔ«عل» برهان‌دوم دراینجاتمام‌می‌شود. امادرنسخه‌های چاپی‌بعدازاین برهان مطالب دیگری‌نیزآمده است (رجوع کنیدبه‌چد:ص۶۰

مسئلهٔ‌هفتم(۱)ـ برهان درستی‌دستور ارشمیدس دربارهٔ مساحت‌مثلث برحسب‌اضلاع‌آن(۲) ازابوعبدالله الشنّی(۳).

ارشمیدس گفته است : هرگاه مساحت سطح یک مثلث را بخواهیم ، تفاضل‌نصف مجموع اضلاع‌آن را با هرضلع می گیریم.سپس یکی از این تفاضلهای سه‌گانه را در دیگری و حاصل را در سومی ضرب می کنیم واین حاصل‌ضرب را در نصف مجموع اضلاع مثلث ضرب کرده جذر حاصل را می گیریم مساحت سطح مثلث به دست می‌آید.(۴)»

برهان- ابوعبدالله (الشّنی) برهان درستی دستور فوق را چنین بیان کرده است(۵):



(شکل۶۸)

مثلث ABC را در نظر گرفته دایرهٔ محیطی آن را رسم می‌کنیم و وسط کمان ABC را نقطهٔ D می‌نامیم و از نقطهٔ D عمود DE را بر AB و عمود DZ را بر AC(۶) فرود می‌آوریم و پاره خطهای AD و DC و DB را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و به‌شعاع AZ کمانی ازدایره رسم می‌کنیم تا AB را در نقطهٔH و AD را در نقطهٔ T قطع کند.

تا اینجا مقدمهٔ استدلال را ازروی نسخهٔ «عل» ترجمه کردم. اما چون بقیهٔ استدلال به‌وجهی طولانی بیان‌شده و در بعضی از مواضع متن عربی افتادگی واشتباه کتابت دارد و فهم آن آسان نیست بهتر دیدم که خلاصهٔ این استدلال را به‌وجهی که برای خواننده به‌سهولت قابل فهم باشد، مطابق با آنچه از متن عربی مفهوم می‌شود، بیان کنم(۷).

ابوعبدالله الشّنی در این استدلال از دو قضیهٔ اول و چهارم (رجوع کنید به صفحات ۶۳ و ۱۴۹) استفاده کرده است:

مساوی با EB (یعنی قسمت اقصر قاعده) می باشد(۷)

$$\left[EB = \frac{1}{2}\left(AB - \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB}\right)\quad \text{یعنی}\right]$$

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ ششم :

(۱)- عل‌ص ۲۲ و ۲۳- سوتر A: ص ۳۷و۳۸ ونیز ص۶۹- چد: ص۵۸ تا ۶۰- چم: ص۱۰۱ تا ۱۰۳

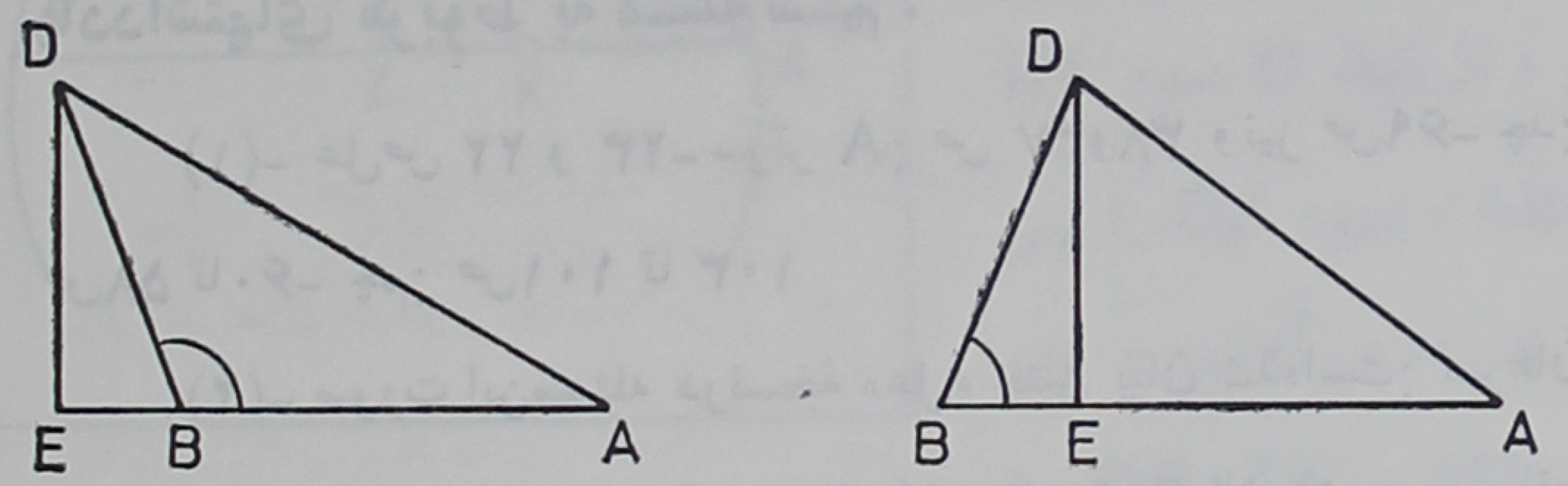
(۲)- صورت این‌مسئله درنسخهٔ «عل» چنین بیان شده‌است: «برهان عمل ارشمیدس فی استخراج اعمدة المثلثات المعلومة الاضلاع و مساقط احجارها لی» - دربارهٔ اصطلاح «مسقط‌حجر» رجوع کنیدبه «بیرونی‌نامه»: ص۱۸۶ .

(۳)-استاد این‌مسئله‌را ازارشمیدس دانسته‌است. اماچون‌دستورهایی که دراین مسئله‌برای محاسبهٔ طول پاره‌خطهایی‌که به‌وسیلهٔ‌پای یك ارتفاع مثلث روی ضلع مقابل آن پدید می‌آید درکتاب «متریکا» (Metrica) تألیف‌ایرن اسکندرانی (Heron of Alexandria)آمده است مورخان ریاضی این مسئله را به ایرن نسبت می‌دهند (رجوع کنید به «هیث H»: ج۲ص ۳۲۰ و ۳۲۱)- سوتر نوشته است : اینکه مسلمانان این دستور را ازارشمیدس دانسته‌اند و نه ازایرن اسکندرانی مطلبی‌است جالب توجه وممکن است این دستور ودستور مسئلهٔ‌هفتم (خواهدآمد) ازارشمیدس‌باشد ونه ازایرن اسکندرانی.

(۴)- استاد به‌طورضمنی فرض‌کرده است‌که AD > BD وزاویهٔ B را هم مطابق‌با شکل حاده‌گرفته است. روابطی‌راکه استاد به‌ثبوت‌رسانیده است می‌توان ازقضایای مربوط به مربع ضلع‌مقابل به زاویهٔ حاده یازاویهٔ

منفرجه در مثلث دلخواه نتیجه گرفت و برعکس.

به‌طور کلی اگر در مثلث ADB پای ارتفاع نظیر رأس D را روی خط راست AB نقطهٔ E بنامیم، برحسب آنکه زاویهٔ B حاده یا منفرجه باشد (رجوع کنید به «نه مقالهٔ هندسه» مقالهٔ سوم، صفحهٔ ۱۷۵ شمارهٔ ۳۰۶) داریم:



(شکل ۶۷)

(اگر B حاده باشد):

$$\overline{AD}^{2} = \overline{AB}^{2} + \overline{BD}^{2} - 2AB \times BE \qquad (1)$$

(اگر B منفرجه باشد):

$$\overline{AD}^{2} = \overline{AB}^{2} + \overline{BD}^{2} + 2AB \times BE \qquad (2)$$

اگر زاویهٔ B حاده و مثلا $AD > BD$ باشد از تساوی (۱) حاصل می‌شود:

$$BE = \frac{\overline{AB}^{2} + \overline{BD}^{2} - \overline{AD}^{2}}{2AB} = \frac{1}{2}\left(AB - \frac{\overline{AD}^{2} - \overline{BD}^{2}}{AB}\right)$$

در این حالت:

$$AE = AB - BE = \frac{1}{2}\left(AB + \frac{\overline{AD}^{2} - \overline{BD}^{2}}{AB}\right)$$

پس :

$$TF = AM = BC$$

و بنا بر این : TH مساحت مستطیل $= AB \times BC$

(یعنی: $\overline{AD}^{۲} - \overline{BD}^{۲} = AB \times BC$)

بنا بر این :

$$BC = \frac{\overline{AD}^{۲} - \overline{BD}^{۲}}{AB}$$

و اگر این مقدار BC را با قاعدهٔ AB جمع کنیم طول خط شکستهٔ ABC به‌دست می‌آید و نصف آن یعنی AE مساوی است با طول قسمت اعظم قاعده.

[یعنی مطابق با آنچه ارشمیدس گفته است :

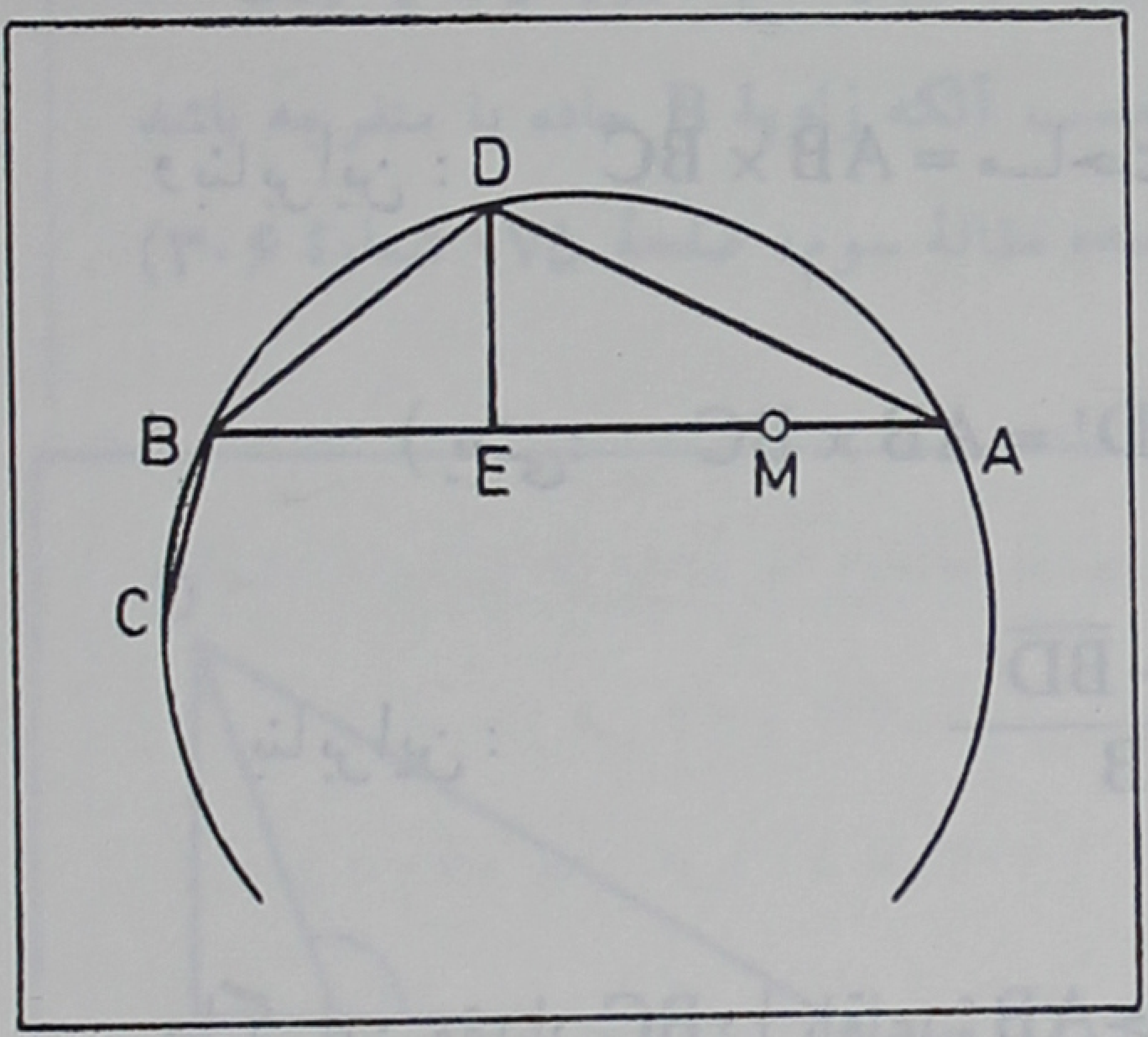
$$\left[AE = \frac{۱}{۲} \left(AB + \frac{\overline{AD}^{۲} - \overline{BD}^{۲}}{AB} \right) \right.$$

و اگر مقدار BC را از قاعدهٔ AB کم کنیم BM باقی می‌ماند و نصف آن یعنی BE مساوی با طول قسمت اقصر قاعده .

[یعنی مطابق با گفتهٔ ارشمیدس:

$$\left[BE = \frac{۱}{۲} \left(AB - \frac{\overline{AD}^{۲} - \overline{BD}^{۲}}{AB} \right) \right.$$

برهان دوم که از برهان اول ساده‌تر است از استاد[٦]ـ مثلث ADB را در نظر گرفته ارتفاع DE نظیر قاعدهٔ AB و دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می کنیم و روی آن کمان $\widehat{DC}$ را مساوی با کمان $\widehat{DA}$ جدا و نقطهٔ B را به C وصل می کنیم. سپس (روی EA) پاره خط EM را مساوی با EB جدا می نماییم.



(شکل ٦٦)

چون (بنا به قضیهٔ دوم) داریم:

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + AB \times BC$$

پس:

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = AB \times BC$$

و از آنجا:

$$\frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB} = BC$$

و اگر این مقدار BC را با قاعدهٔ AB جمع کنیم طول خط شکستهٔ ABC به‌دست می‌آید و نصف آن مساوی با AE (یعنی قسمت اعظم قاعده) است

[یعنی $AE = \frac{1}{2}\left(AB + \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB}\right)$]

و اگر این مقدار BC را از قاعدهٔ AB کم کنیم BM باقی می‌ماند و نصف آن

و روی پاره‌خط BT نقطهٔ M را طوری اختیار می کنیم که:

$$TM = AH \qquad (۲)$$

اگر طول اضلاع چهار ضلعی ABCD را به ترتیب

$AB = a$ و $BC = b$ و $CD = c$ و $DA = d$ و نصف محیط

چهارضلعی را p بنامیم نظر به قضیهٔ اول داریم:

$$BH = \frac{a+d}{۲}$$ (نقطهٔ H وسط خط شکستهٔ BAD است)

و $$BT = \frac{b+c}{۲}$$ (نقطهٔ T وسط خط شکستهٔ BCD است)

بنابراین:

$$BH + BT = \frac{a+b+c+d}{۲} = p$$

به‌همین‌طریق معلوم می‌شود که:

$$HA + AD + DC + CT = p$$

اکنون تفاضلهای $(p-a)$ و $(p-b)$ و $(p-c)$ و $(p-d)$ با درنظر

گرفتن تساویهای فوق و دو تساوی (۱) و(۲) حساب می کنیم:

$$p - a = (BH + BT) - AB = BH + BT - AH - HB$$

$$= BT - AH = BT - CT = BM$$

یعنی $(p-a) = BM$ (۳)

$$p-b = (BH+BT) - BC = BH + BT - BT - TC$$
$$= BH - TC = BL$$

یعنی: $(p-b) = BL$ (۴)

$$p-c = HA + AD + DC + CT - CD = (HA + CT) + AD$$
$$= AL + AD$$

یعنی: $(p-c) = AL + AD$ (۵)

$$p-d = HA + AD + DC + CT - AD = (HA + CT) + CD$$
$$= CM + CD$$

یعنی $(p-d) = CM + CD$ (۶)

اکنون اگر مساحت چهارضلعی ABCD را S بنامیم برای اثبات حکم قضیه یعنی اثبات تساوی:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

نظر به روابط (۳) و (۴) و (۵) و (۶) کافی است ثابت کنیم که

$$S^2 = BM \times BL \times (AL + AD)(CM + CD)$$

و یا:

$$\frac{BL(AL+AD)}{S} = \frac{S}{BM(CM+CD)} \qquad (۷)$$

برای اثبات صحت این تساوی می گوییم سه مثلث قائم الزاویهٔ EHA و EBZ

مسئلهٔ هشتم (۱)- برهان درستی دستور محاسبهٔ مساحت چهارضلعی دلخواه محاطی که منسوب به هندیان است(۲) از ابوعبدالله الشنی(۳).

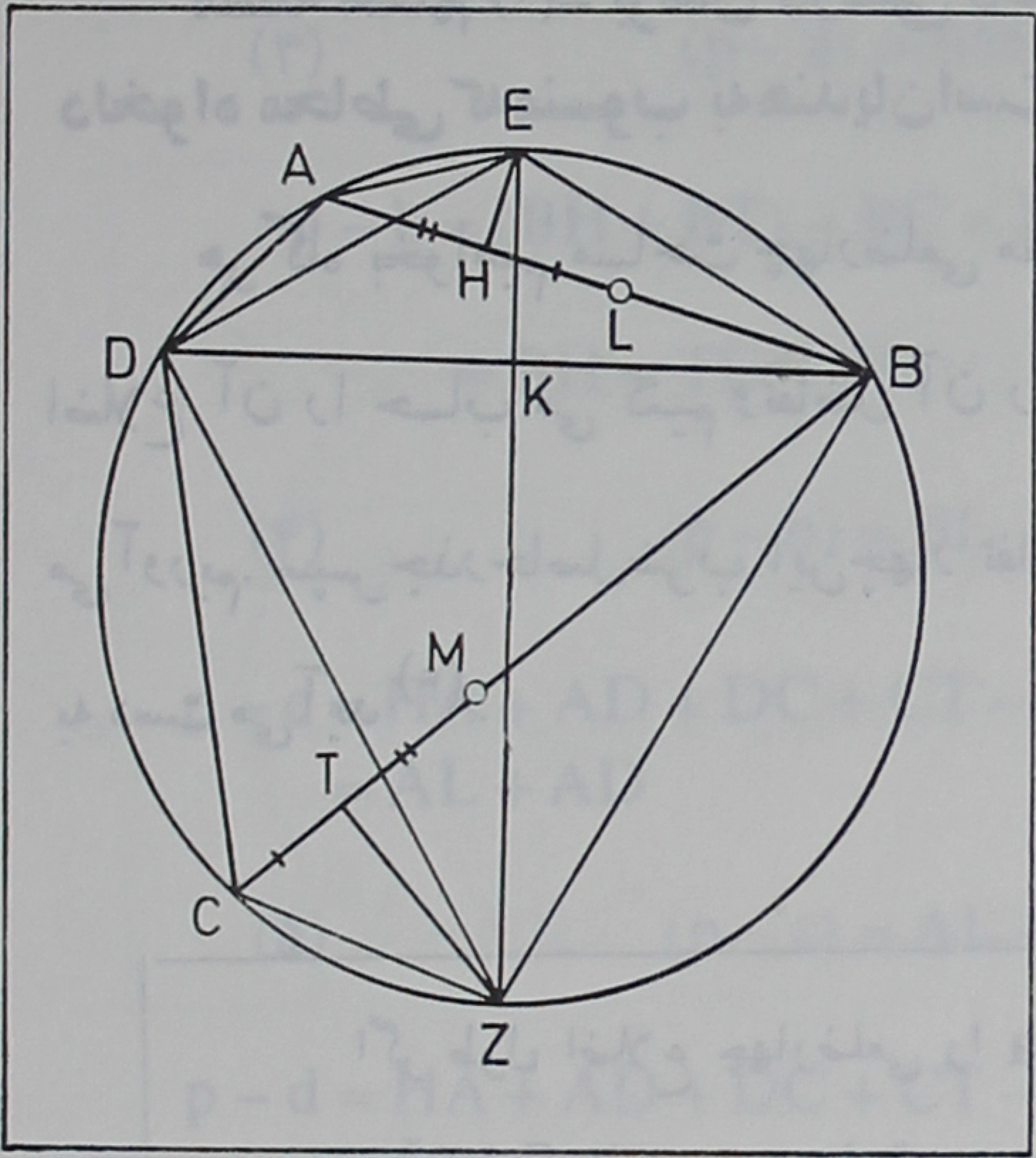
هرگاه بخواهیم مساحت چهارضلعی محاطی دلخواهی را بدانیم نصف مجموع اضلاع آن را حساب می کنیم و تفاضل آن را با هریك از اضلاع چهارضلعی بدست می آوریم. سپس جذر حاصل ضرب این چهار تفاضل رامی گیریم، مساحت چهارضلعی به دست می آید (۴).

اگر طول اضلاع چهارضلعی را a و b و c و d و نصف محیط آن را p و مساحت آن را S بنامیم دستور فوق چنین نوشته می‌شود:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

ابوعبدالله الشنّی این دستور را بااستفاده از قضایای اول و چهارم رجوع کنید به صفحات ۶۳ و ۱۴۹) ثابت کرده است.

اگرچه استدلالی که استاد ازقول وی نقل کرده است درنسخهٔ «عل» ونسخهٔ چاپی «استخراج الاوتار» اصولا یکی است ولی طرز بیان آن دردو نسخه باهم متفاوت است. و حتی اسامی نقاط شکل در دونسخه تفاوت دارد. چون این استدلال علاوه بر آنکه مفصل است در هر دونسخه طوری انشاء شده که فهم آن چندان آسان نیست، بدون آنکه در اصول آن تغییر دهم و چیزی به آن اضافه یا ازآن کم کنم، باپس وپیش کردن مطالب آن طوری آن را تحریر می کنم که (شاید) فهم آن آسانتر باشد. وبرای رعایت جانب اختصار آنچه را ازروی شکل واضح است توضیح نمی دهم.



(شکل ۷۰)

برهان - چهار ضلعی ABCD را که در یك دایره محاط است در نظر می گیریم و کمانهای $\widehat{BAC}$ و $\widehat{BCD}$ را به ترتیب در نقاط E و Z نصف می کنیم و پاره خطهای BE و ED و DZ و BZ و EA و EZ را می کشیم و از نقطهٔ E عمود EH را بر AB واز نقطهٔ Z عمود ZT را بر BC فرود می آوریم و نقطهٔ تقاطع BD را با EZ نقطهٔ K می نامیم.

واضح است که $ED > EA$ و چون دو مثلث قائم‌الزاویهٔ EDK و EHA متشابه هستند از نامساوی فوق معلوم می‌شود که: $DK > AH$.

از طرف دیگر چون نقطهٔ T بنا به قضیهٔ اول وسط خط شکستهٔ BCD است

پس $BT = \frac{BC + DC}{۲}$ بنابراین $BT > DK$

(زیرا EZ قطر دایره وعمود منصف BD است و DK نصف DB می باشد)

پس به‌طریق اولی داریم $BT > AH$

به‌همین‌طریق ثابت می‌شود که $BH > CT$

اینك روی پاره خط BH نقطهٔ L را طوری می گیریم که:

$$HL = CT \qquad (۱)$$

$$\overline{AZ}^{2} = AZ \times ZC$$

اما واضح است که $AZ = p - AD$ (زیرا $AD + AZ$ نصف محیط است.) و $ZC = p - CD$ بنابراین داریم:

$$\overline{AZ}^{2} = (p - AD)(p - CD) \qquad (ه)$$

اکنون اگر مقادیر طرفهای چپ تساویهای (ج) و (د) و (ه) را در تساوی (الف) منظور کنیم حاصل می‌شود:

$$\frac{(p - AC)p}{\triangle.ADC} = \frac{\triangle.ADC}{(p - AD)(p - CD)}$$

و از آنجا:

$$(\triangle.ADC)^{2} = p(p - AC)(p - AD)(p - CD)$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ هفتم:

(۱)- عل: ص ۲۳ تا ۲۵-سوتر A: ص ۳۹ و ۴۰ و نیز ۶۹ و ۷۰- چد: ص ۶۱ تا ۶۴-چم: ص ۱۰۴ تا ۱۱۳.

(۲)- عبارت متن عربی در نسخهٔ «عل» چنین است: «برهان عمل ارشمیدس فی مساحة المثلثات من جهة تفاضل اضلاعها لابی عبدالله الشنی»

(۳)- رجوع کنید به «بیرونی نامه»: ص ۵۳۰

(۴)- این همان دستور محاسبهٔ مساحت مثلث بر حسب اضلاع آن است که در

کتابهای هندسهٔ کنونی چنین نوشته می‌شود:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

استاد این دستور و دستور مربوط به‌مسئلهٔ هشتم را از ارشمیدس دانسته است. در بعضی از کتابهای تاریخ ریاضیات این دستور را به‌ایرن اسکندرانی (Heron of Alexandria) نسبت می‌دهند. هیث در کتاب «تاریخ ریاضیات یونانی» خود نوشته است که این دستور در کتاب «متریکا» (Metrica) و کتاب «دیوپترا» (Dioptra) تألیف ایرن اسکندرانی آمده است ولی اکنون از اطلاعاتی که از منابع اسلامی بدست آمده است می‌دانیم که این دستور از ارشمیدس است (رجوع کنید به‌هیث H : ج۲ ص۳۲۱ و ۳۲۲) - ملاحظه می‌شود که نکته‌هایی که استاد در ضمن تألیفات خود دربارهٔ تاریخ ریاضیات گوشزد کرده است تا چه‌حد مورد استفاده دانشمندان معاصر است.

(۵)- سوتر به‌حق اظهار نظر کرده است که اثبات این دستور و دستور مربوط به‌مسئلهٔ هشتم یقیناً از جالب توجه‌ترین قسمتهای کتاب «استخراج الاوتار» استاد بیرونی است. هر دو اثبات بسیار بدیع و یگانه برهانهایی هستند که در این باره از دورانهای بسیار قدیم و قرون وسطی (البته بعد از اثبات ایرن اسکندرانی در مورد مساحت مثلث) به دست ما رسیده است. و هر دو اثبات را بیرونی از ابوعبدالله الشنّی دانسته و از روی آنها معلوم می‌شود که ابوعبدالله یکی از ریاضیدانان برجسته و زبردست دورهٔ اسلامی بوده است (← سوتر A: ص۷۰).

(۶)- در نسخهٔ «عل» به‌جای «اج» اشتباهاً نوشته شده است: «اد»

(۷)- در این قسمت از صفحهٔ ۷۰ کتاب «سوتر A» نیز استفاده کرده‌ام.

(۸)- ابوعبدالله الشنی برای اثبات این قسمت ابتدا پاره‌خط ZK را روی ZA مساوی با BE جدا کرده و نشان داده است که:

$$\overline{AZ}^2 - \overline{BE}^2 = AK \times CK$$

و همان تساوی شمارهٔ (۱۱) را به دست آورده است.

اما $AZ = \frac{AC}{۲}$ و $BE = \frac{AB - BC}{۲}$

(زیرا نقطهٔ E نظر به قضیهٔ اول وسط خط شکستهٔ ABC است)

پس تساوی (۱۰) چنین نوشته می‌شود(۸):

$$\overline{AZ}^۲ - \overline{BE}^۲ = \left(\frac{AC}{۲} + \frac{AB - BC}{۲}\right)\left(\frac{AC}{۲} - \frac{AB - BC}{۲}\right)$$

و چون محیط مثلث ABC را ۲p نامیده‌ایم داریم:

$$\overline{AZ}^۲ - \overline{BE}^۲ = (p - BC)(p - AB) \qquad (۱۱)$$

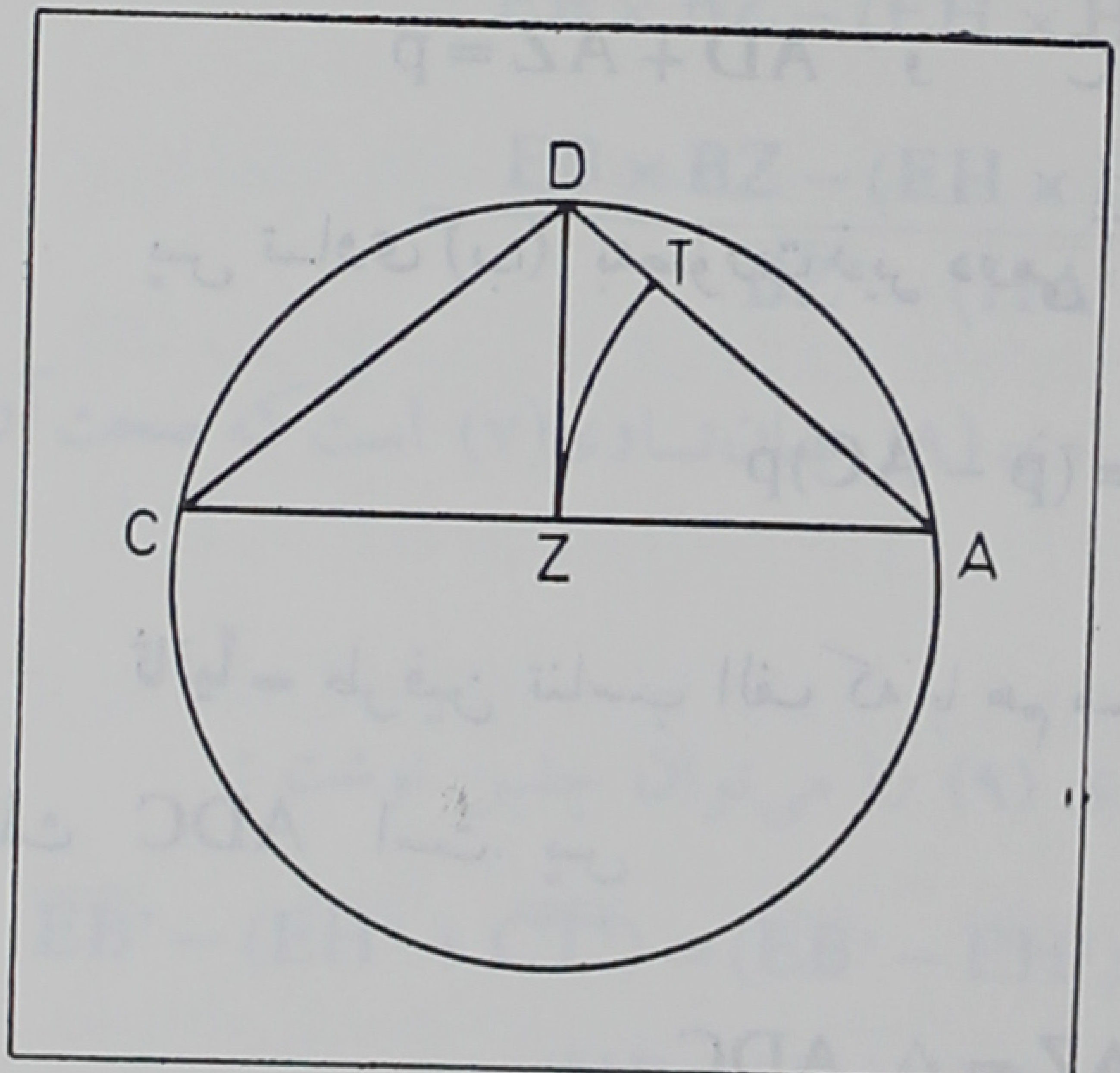
حال اگر مقادیر طرفهای چپ تساوی (۸) و (۹) و (۱۱) را در رابطهٔ (۴) منظور کنیم نتیجه می‌شود:

$$\frac{p(p - AC)}{\triangle.ABC} = \frac{\triangle.ABC}{(p - BC)(p - AB)}$$

و از آنجا
$$(\triangle.ABC)^۲ = p(p - AC)(p - BC)(p - AB)$$

و یا
$$\triangle.ABC = \sqrt{p(p - AC)(p - BC)(p - AB)}$$

ابوعبدالله الشّنی پس از اثبات دستور فوق حالتی را که مثلث متساوی‌الساقین باشد در نظر گرفته و باز دستور کلی را در این حالت خاص به وجه زیر ثابت کرده است: فرض می‌کنیم که مثلث ADC متساوی الساقین باشد (AD = DC) و دایرهٔ محیطی مثلث و ارتفاع AZ نظیر ضلع AC را رسم می‌کنیم و به‌مرکز A و به‌شعاع AZ کمانی از دایره



(شکل ۶۹)

رسم می کنیم تا AD را در نقطهٔ T قطع کند.

اگـر صورت ومخرج نسبت $\frac{DZ}{AZ}$ را یك بار در DZ ویك بار در AZ ضرب کنیم حـاصل می‌شود:

$$\frac{\overline{DZ}^{2}}{DZ \times AZ} = \frac{DZ \times AZ}{\overline{AZ}^{2}} \qquad \text{(الف)}$$

اکنون مقادیر چهارجملهٔ تناسب (الف) را جدا گانه حساب می کنیم:

اولا ـ ازروی‌شکل واضح‌است که:

$$\overline{DZ}^{2} = \overline{AD}^{2} - \overline{AZ}^{2} = \overline{AD}^{2} - \overline{AT}^{2} = (AD - AT)(AD + AT)$$

ویا

$$\overline{DZ}^{2} = DT(AD + AZ) \qquad \text{(ب)}$$

اما اگر محیط مثلث را ۲p بنامیم واضح است که :

$$DT = p - 2AZ = p - AC \qquad \text{و} \qquad AD + AZ = p$$

پس تساوی (ب) به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\overline{DZ}^{2} = (p - AC)p \qquad \text{(ج)}$$

ثانیاً ـ طرفین تناسب الف که با هم مساوی‌هستند هر کدام‌مساوی بامساحت مثلث ADC است. پس

$$DZ \times AZ = \triangle .ADC \qquad \text{(د)}$$

ثالثاً ـ مخرج نسبت‌طرف‌راست‌تناسب(الف)یعنی $\overline{AZ}^{2}$ را‌می‌توان‌چنین‌نوشت:

و CTZ متشابه‌هستند و داریم :

$$\frac{EB}{BZ}=\frac{EH}{HA}=\frac{CT}{TZ} \qquad (۸)$$

اکنون صورت ومخرج هریك از سه‌نسبت فوق را یك‌بار درصورت ویك‌بار درمخرج همان نسبت ضرب می کنیم حاصل می‌شود :

$$\frac{\overline{EB}^{۲}}{ED \times BZ}=\frac{EB \times BZ}{\overline{BZ}^{۲}}$$

و

$$\frac{\overline{EH}^{۲}}{EH \times HA}=\frac{EH \times HA}{\overline{HA}^{۲}}$$

و

$$\frac{\overline{CT}^{۲}}{CT \times TZ}=\frac{CT \times TZ}{\overline{TZ}^{۲}}$$

وچون همهٔ نسبتهای فوق نظر به‌روابط(۸) باهم‌مساویند نظر به‌خاصیت‌نسبتهای متساوی می‌توان نوشت :

$$\frac{\overline{EB}^{۲}-(\overline{EH}^{۲}+\overline{CT}^{۲})}{EB \times BZ-(EH \times HA+CT \times TZ)}= \qquad (۹)$$

$$=\frac{EB \times BZ-(EH \times HA+CT \times TZ)}{\overline{BZ}^{۲}-(\overline{HA}^{۲}+\overline{TZ}^{۲})}$$

اکنون نشان می‌دهیم که تساوی (۹) همان‌تساوی(۷) است که صحت آن را ثابت کرده‌ایم:

اولاً صورت نسبت طرف چپ تساوی (۹) را می‌توان چنین نوشت :

$$\overline{EB}^{۲}-(\overline{EH}^{۲}+\overline{CT}^{۲})=(\overline{EB}^{۲}-\overline{EH}^{۲})-\overline{HL}^{۲}=\overline{HB}^{۲}-\overline{HL}^{۲}$$

$$=(HB+HL)(HB-HL)$$

$$=(HB+HL)\times BL=(AL+AD)\times BL$$

بنا بر این صورت نسبت طرف چپ تساوی (۹) مساوی با صورت نسبت طرف چپ تساوی (۷) است.

ثانیاً از روی شکل واضح است که ($\triangle$. یعنی مساحت):

$$EB \times BZ = \triangle.EBZD$$

از طرف دیگر نظر به قضیهٔ چهارم داریم:

$$\triangle.BED - \triangle.BAD = EH \times HA$$

$$\triangle.BZD - \triangle.BCD = ZT \times CT$$

و اگر دو تساوی اخیر را عضو به عضو با هم جمع کنیم حاصل می‌شود:

$$\triangle.BEZD - \triangle.ABCD = EH \times HA + ZT \times CT$$

بنا بر این هر یک از وسطین تناسب (۹) را می‌توان چنین نوشت:

$$EB \times BZ - (EH \times HA + CT \times TZ) =$$
$$= \triangle.EBZD - (\triangle.EBZD - \triangle.ABCD) = \triangle.ABCD = S$$

پس وسطین تناسب (۹) همان وسطین تناسب (۷) هستند.

ثالثاً مخرج نسبت طرف راست تساوی (۹) را می‌توان چنین نوشت:

$$\overline{BZ}^2 - (\overline{HA}^2 + \overline{TZ}^2) = (\overline{BZ}^2 - \overline{TZ}^2) - \overline{TM}^2 = \overline{BT}^2 - \overline{TM}^2$$

$$= (BT - TM)(BT + TM) = BM(CT + CD + TM)$$
$$= BM \times (CD + CM)$$

پس مخرج نسبت طرف راست تساوی (۹) مساوی با مخرج نسبت طرف راست تساوی (۷) است و قضیه ثابت می‌باشد.

یادداشت‌های مربوط به مسئلهٔ هشتم:

۱- عل: ص ۲۵ و ۲۶ - سوتر A : ص ۴۰ و ۷۰- چد: ص ۶۴ تا ۶۷ - چم: ص ۱۱۴ تا ۱۱۹

(۲)- عبارت متن عربی در نسخهٔ «عل» چنین است: «برهان عمل ینسب الی الهند فی مساحة المنحرف الذی یحیط به دایرة لابی عبدالله الشنّی» - دربارهٔ اصطلاح «منحرف» رجوع کنید به «بیرونی‌نامه» ص ۲۱۰ و ۱۹۱

(۳)- رجوع کنید به «بیرونی‌نامه» ص ۵۳۰

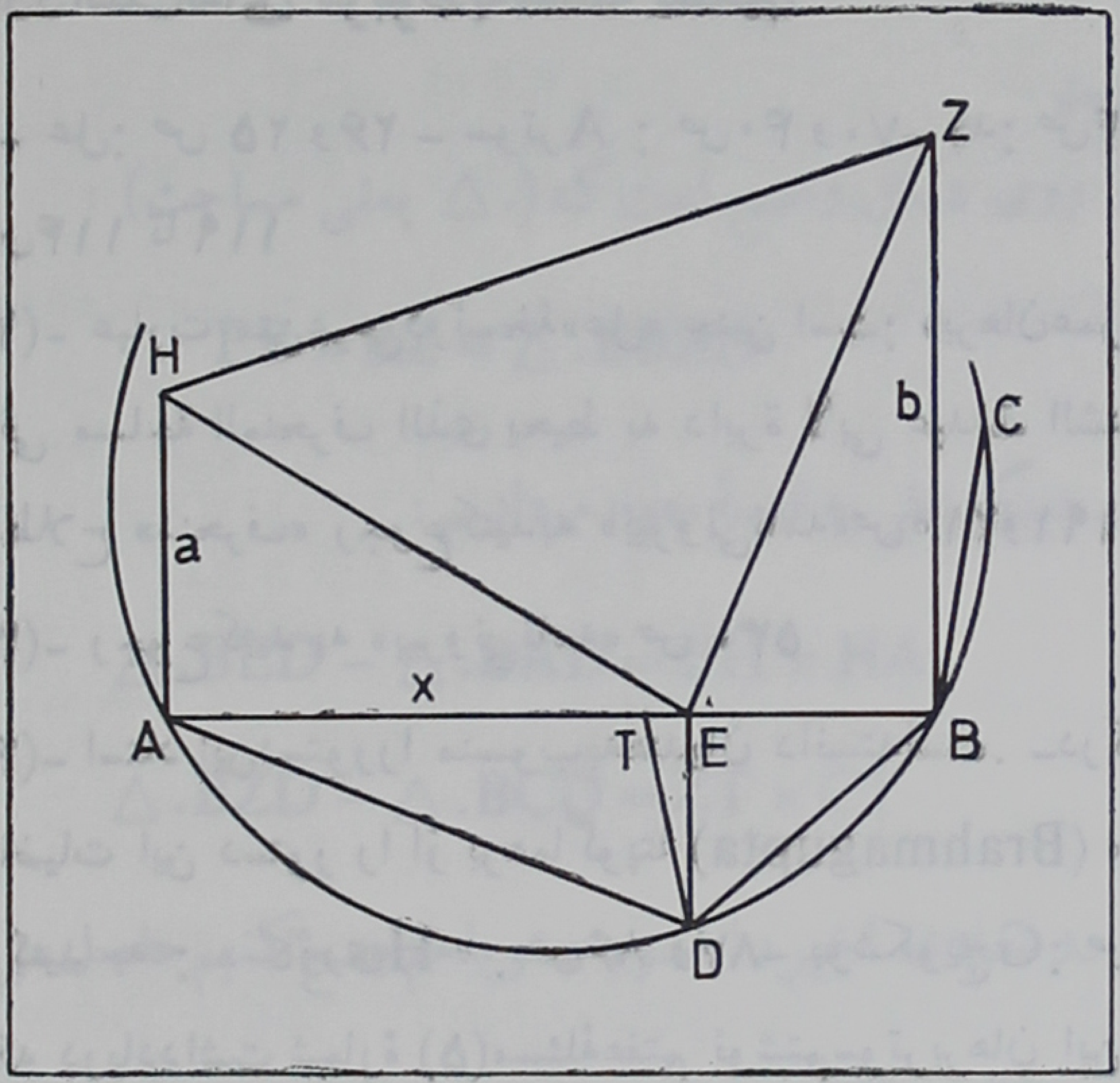
(۴)- استاد این دستور را منسوب به هندیان دانسته است. - در کتابهای تاریخ ریاضیات این دستور را از برهما گوپتا (Brahmagupta) می‌دانند (رجوع کنید به : « کاژری H » : ص ۸۶ و ۸۷- یوشکویچ G: ص ۱۵۵) - همچنانکه دریادداشت شمارهٔ (۵) مسئلهٔ هفتم نوشتم سوتر برهان این دستور و نیز برهان مسئلهٔ هفتم را از بدیعترین قسمتهای کتاب « استخراج الاوتار » دانسته و نوشته است که این برهان یگانه برهانی است که برای این دستور از دورانهای قدیم و قرون وسطی به‌دست ما رسیده است.

مسئلهٔ نهم (۱) - مسئلهٔ دو درخت خرما و نهر آب ودو پرنده واین مسئله‌یی است که ذکر آن در کتابهای جبر و مقابله متداول است(۲).

صورت مسئله این است:

دودرخت (خرما) BZ و AH به‌طولهای معلوم بردو کنار نهری به‌عرض معلوم AB قراردارند. یك ماهی درسطح آب ظاهر می‌شود و دو پرنده از سر دو درخت به‌طرف او (به‌خط مستقیم وبا سرعتهای متساوی) پایین می آیند ودریك لحظه به‌ماهی می‌رسند. می‌خواهیم فاصلهٔ محل ظهورماهی را از کنار نهروهمچنین فاصله‌ای را

که هریك از دو پرنده در هوا پیموده‌اند (تا به‌ماهی رسیده‌اند) حساب کنیم[۳].



(شکل ۷۱)

راه حل از استاد[۴]ـ (البته فرض این است که محل ظهور ماهی ونقاط A و B یعنی پاهای دودرخت بریك استقامت هستند).

اگر طولهای دو درخت خرما را $AH = a$ و $BZ = b$ و فاصلهٔ پای دودرخت را $AB = d$ بنامیم و فرض کنیم کـه دو پرنده در نقطهٔ E به ماهی می‌رسند دستورهایی را کـه استاد برای حل مسئله داده است[۵] می‌توان به صورت زیر درآورد:

$$AE = \frac{۱}{۲}\left(\frac{b^۲ - a^۲}{d} + d\right)$$

$$BE = d - AE$$

$$EH = EZ = \sqrt{a^۲ + \overline{AE}^۲} = \sqrt{b^۲ + \overline{BE}^۲}$$

برهان – فرض می کنیم طول درخت بزرگتر BZ و طول درخت کوچکتر AH ونقطهٔ ظهورماهی برسطح آب E باشد و نقاط H و Z را به E وصل می کنیم. واضح است که $BZ = EH$. زیرا این دوطول را دو پرنده دریک زمان (و با سرعتهای متساوی) پیموده‌اند. بنابراین:

$$\overline{BZ}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{AE}^2$$

و یا(۶):

$$\overline{BZ}^2 - \overline{AH}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$$

اکنون مثلث ADB را به قسمی می‌سازیم که $AD = BZ$ و $BD = AH$ باشد(۷) و DE را رسم کرده می گوییم DE بر AB عمود است. زیرا اگر DE بر AB عمود نباشد می‌توان عمود DT را از نقطهٔ D بر AB فرودآورد.

دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AT}^2 - \overline{BT}^2$$

اما قبلا دیدیم که:

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{BZ}^2 - \overline{AH}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$$

پس لازم می آید که:

$$\overline{AT}^2 - \overline{BT}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$$

یعنی هم DT بر AB عمود است وهم DE واین‌ممکن‌نیست. (پس همچنانکه گفتیم DE بر AB عمود است).

اینک دایرهٔ محیطی مثلث ADB را رسم کرده روی آن کمان $\widehat{DBC}$ را مساوی با کمان $\widehat{AD}$ جدا می کنیم. خط شکستهٔ ABC در این دایره محاط شده

و از نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ADC}$ عمود DE بر AB فرود آمده است. و (بنا به قضیهٔ دوم) داریم:

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = AB \times BC$$

و از آنجا:

$$BC = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB} = \frac{\overline{BZ}^2 - \overline{AH}^2}{AB}$$

اما (بنا به قضیهٔ اول):

$$AB + BC = 2AE$$

بنابراین:

$$AE = \frac{1}{2}(BC + AB) = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{BZ}^2 - \overline{AH}^2}{AB} + AB\right)$$

و این فاصلهٔ محل ظهور ماهی از پای درخت AH است. اگر AE را از AB کم کنیم فاصلهٔ نقطهٔ E از پای درخت به دست می آید(۸).

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ نهم:

(۱)- عل: ص۲۶و۲۷- سوتر A: ص۴۲تا ۴۴و نیز صفحات ۷۰و۷۱- چد: ص۸۲ تا ۸۴-چم ۱۳۱ تا ۱۳۴.

(۲)- عنوان این مسئله در نسخهٔ «عل» چنین است: «مسئلة النخلتین والنهر والطائران وهی متداوله فی کتب الجبر و المقابله لی»

(۳)- این مسئله از مسائل بسیار قدیمی است که در کتابهای جبر و مقابله آمده است. از جمله ابوبکر بن محمد بن حسین کرجی آن را در کتاب «الکافی فی الحساب»

خود آورده است (رجوع کنید به سوتر A : ص ۷۱- برای کسب اطلاع از احوال و آثار کرجی رجوع کنید به «قربانی: ریاضیدانان ایرانی: صفحات ۲۶۸ به بعد). همین مسئله را غیاث‌الدین جمشید کاشانی در «مفتاح الحساب» با معلومات عددی آورده و آن را از راه جبر حل کرده‌است (مفتاح الحساب چاپی صفحهٔ ۲۴۳ به بعد) و ترجمهٔ فارسی آن عیناً در کتاب «کنز الحساب» تألیف فرهادمیرزا (صفحهٔ ۳۰۸ به بعد) آمده است.

(۴) - حل این مسئله از راه جبر بسیار ساده است. چه اگر طولهای دو درخت را $AH = a$ و $BZ = b$ و عرض نهر را d و محل ظهور ماهی را درسطح آب E بنامیم و فاصلهٔ AE را x بگیریم واضح است که:

$\overline{EH}^2 = a^2 + x^2$ و $\overline{EZ}^2 = b^2 + (d-x)^2$

وچون $EH = EZ$ پس $a^2 + x^2 = b^2 + (d-x)^2$

ویا $2dx = b^2 + d^2 - a^2$

و از آنجا $x = AE = \dfrac{b^2 + d^2 - a^2}{2d}$

(۵)- عبارت عربی این دستور درنسخهٔ «عل» چنین‌است:

«انا نضرب کل واحد من طولی النخلتین فی نفسه نقسم فضل ما بین مایجتمع منها علی عرض النهر $\left(\dfrac{\overline{BZ}^2 - \overline{AH}^2}{d}\right)$ فما خرج نزیده علی المقسوم علیه و نقسم نصف مابلغ $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\overline{BZ}^2 - \overline{AH}^2}{d} + d\right)$ فیکون بعد موضع ظهور السمکة من اصل النخلة القصیرة فان القینا ذلک من عرض النهر کله بقی بعده من اصل النخلة الطویله . وان ضربنا طول النخلة فی نفسه و بعد ما بین اصلها و موضع السمکة فی نفسه واخذنا جذر مجموع المبلغین

$\left(\sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{AE}^2}\right)$

کان ذلك هوماطاره کل واحد من الطائرین»

(۶)- در اینجا وقتی استادخواسته است تساوی دوم را از تساوی اول نتیجه بگیرد عبارت زیر را اضافه کرده است (در نسخهٔ «عل») که ظاهراً افتادگی دارد. آن عبارت این است: «وذلك ظاهر من جهة انه اذا کان مقداران غیرمتساویین فان فضل ما بین الفضولین یکون بعینه فضل مابین الباقی منهما» (این عبارت درنسخه‌های چاپی نیست) .

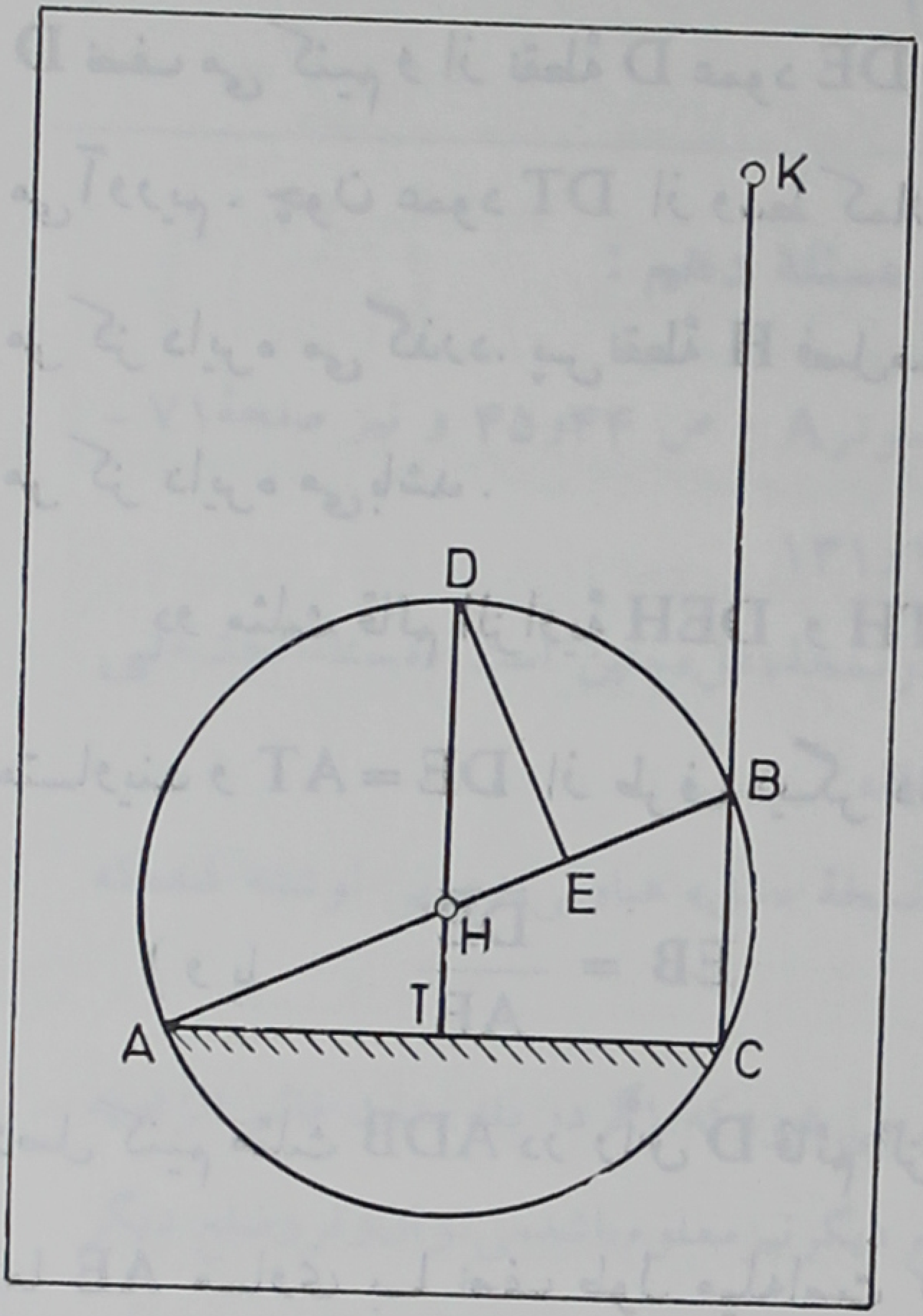
(۷)- شرط امکان ترسیم مثلث ADB این است که AB یعنی عرض نهر از مجموع طولهای دو درخت یعنی AH + BZ کوچکتر باشد . استاد این شرط راقید نکرده و آقای احمد سعیدالدمرداش درچاپ خود متوجه این مطلب نشده است .

(۸)- چنانکه دریادداشت شمارهٔ (۴) متذکر شدم حل این مسئله از راه جبر بسیار ساده است . ظاهراً استاد برای آنکه مورد استعمال خواص خط شکستهٔ محاط دردایره را درجبر نشان دهد این راه‌حل طولانی را اختیار کرده است که چنانکه در یادداشت شمارهٔ (۷) خاطر نشان کردم کلی هم نیست . درپایان این مسئله درنسخه‌های چاپی عبارتی آمده است که می‌رساند که استاد خود متوجه این مطلب بوده است. چه نوشته است که برای این مسئله ومسئلهٔ دهم (خواهدآمد) راههای ساده‌تری هست . اما غرض از این راه حل این است که مورد استعمال خاصیت خط شکستهٔ محاط در دایره و چگونگی تصرف درآن رانشان دهم (وقدیمکن وجود طرق الی المطالب فی المسائل المتقدمه اسهل من التی اتفقت فی الوقت. الا ان الغرض من صرفها الی امر واحد و هو الابانة عن محل خواص هذا الشکل من هذه الصناعة والارشاد الی کیفیة التصرف فیها » (این عبارت در نسخهٔ « عل » در صفحهٔ ۳۲ آمده است) .

مسئلهٔ دهم (۱)**ـ** مسئلهٔ چوب شکسته که ذکر آن در کتابهای جبر ومقابله آمده است(۲).

صورت مسئله این است :

چوب (CK) عمود بر سطح زمین نصب شده است. این چوب در نقطه‌ای مانند B شکسته و سر آن در نقطهٔ A به زمین رسیده است. طول چوب (CK) معلوم و فاصلهٔ سر آن که به زمین رسیده از پای آن (AC) نیز معلوم است می‌خواهیم محل شکستگی چوب (یعنی در واقع طولهای BC و AB را) معلوم کنیم(۳).



(شکل ۷۲)

راه حل از استاد (۴) **ـ** دستوری را که استاد برای حل این مسئله داده است می‌توان به صورت زیر درآورد(۴):

$$AB = \frac{CK}{۲} + \frac{(\frac{AC}{۲})^{۲}}{(\frac{CK}{۲})}$$

$$CB = \frac{CK}{۲} - \frac{(\frac{AC}{۲})^{۲}}{(\frac{CK}{۲})}$$

برهان - میلهٔ چوبی CK برسطح زمین عمود است. ایـن میله در نقطهٔ B می‌شکند و بدون آنکه دوقسمت آن از هم جدا شود خم می‌شود وسر آن در نقطهٔ A به زمین می‌رسد. می‌خواهیم طول BC را حساب کنیم.

دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را رسم کرده کمان ABC را در نقطهٔ D نصف می کنیم و از نقطهٔ D عمود DE را بر AB و عمود DT را بر AC فرود می‌آوریم. چون عمود DT از وسط کمان ABC بروتر AC فرود آمده است از مرکز دایره می گذرد. پس نقطهٔ H فصل‌مشترك DT با AB (که قطر دایره است) مرکز دایره می‌باشد.

دو مثلث قائم الزاویهٔ DEH و ATH (در حالت وتر ویك زاویهٔ حاده) متساویند و DE = AT از طرف دیگر داریم: $\frac{AE}{ED}=\frac{DE}{EB}$

(و یا $EB = \frac{\overline{DE}^{2}}{AE}$ زیرا اگر نقطهٔ D را به نقاط A و B وصل کنیم مثلث ADB در رأس D قائم الزاویه و DE ارتفاع واردبروتر آن‌است) اما AE مساوی بـا نصف طول میله‌است (زیرا بنا به‌قضیهٔ اول داریم: $AE = \frac{AB+BC}{۲}$ و $AB = BK$) بنابر این مقدار EB معلوم است (زیرا دیدیم که $EB = \frac{\overline{DE}^{2}}{AE}$ و $DE = AT = \frac{AC}{۲}$ معلوم و $AE = \frac{CK}{۲}$ نیز معلوم است پس داریم:

$$EB = \frac{\left(\frac{AC}{۲}\right)^{۲}}{\frac{CK}{۲}}$$)

بنا براین :

$$AB = AE + EB = \frac{CK}{۲} + \frac{(\frac{AC}{۲})^۲}{(\frac{CK}{۲})}$$

و

$$BC = CK - AB = \frac{CK}{۲} - \frac{(\frac{AC}{۲})^۲}{(\frac{CK}{۲})}$$

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ دهم :

(۱)- عل: ص۲۷و۲۸ - سوترA : ص ۴۴و۴۵ و نیز صفحهٔ ۷۱ - چد : ص۸۱و۸۲ - چم: ص ۱۳۰و۱۳۱

(۲)- عنوان این مسئله در نسخهٔ «عل» چنین است: «مسئلة الخشبة لی وذکرها یجیء فی کتب الجبر و المقابلة»

(۳)- درحاشیهٔ صفحهٔ ۲۷ نسخهٔ «عل» عبارتی به‌عربی نوشته شده که معنی آن این است :

از روی این مسئله معلوم می شود که اگر در یك مثلث قائم الزاویه مجموع وتر و یك ضلع معلوم و ضلع دیگر نیز معلوم باشد می‌توان وتر و ضلع دیگر آن را حساب کرد .

(۴)- حل این مسئله از راه جبر فوق العاده ساده است. چه اگر طول معلوم چوب را $CK = h$ و فاصلهٔ AC را d بنامیم و فاصلهٔ محل شکستگی از پای چوب یعنی فاصلهٔ BC را که مجهول است x بگیریم از مثلث قائم الزاویهٔ ABC معلوم می‌شود که $\overline{AB}^۲ = x^۲ + d^۲ = (h - x)^۲ = \overline{BK}^۲$

و از آنجا $$BC = x = \frac{h^۲ - d^۲}{۲h}$$

و این همان مقداری است که استاد آن را به صورت

$$BC = \frac{h}{۲} - \frac{(\frac{d}{۲})^{۲}}{(\frac{h}{۲})}$$ نوشته است.

(۵)- عبارت عربی این دستور در نسخهٔ «عل» چنین است:

«نضرب نصف البعد الذی بین موضع رأسه و بین اصله من الارض فی نفسه $\left((\frac{AC}{۲})^{۲}\right)$ ونقسم علی نصف طول الخشبة $\left(\frac{\overline{AC}^{۲}}{۲} : \frac{CK}{۲}\right)$

فما خرج فهو الذی ان نقصته من نصف طول الخشبه بقی مابقی منها قایماً علی وجه الارض (BC) وان زدته علی نصف طول الخشبه اجتمع مقدار ما انکسر (BK) و انعطف الی الارض»

مسئلهٔ یازدهم - مسئله‌ای است مربوط به علم هیئت که استاد آن را از مقالهٔ «فی التحلیل والتقطیع للتعدیل» تألیف خود (رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحات ۶۱ تا ۶۶) استخراج و نقل کرده است.

عنوان مسئله در نسخهٔ «عل» چنین است: **«حل التعدیل و تقطیعه لنصف الفلك الخارج المرکزلی من کتابی المخصوص بهذا المعنی»**

راه‌حل همین مسئله در صفحات ۱۱۵ تا ۱۱۶ و برهان آن در صفحات ۱۳۴ تا ۱۳۶ از کتاب «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد نیز آمده است. و چنانکه در «بیرونی نامه» نوشته‌ام این قسمت از چاپ حیدرآباد مربوط به همان کتاب «فی التحلیل والتقطیع للتعدیل» تألیف استاد است که اشتباهاً جزو «استخراج الاوتار» چاپ شده است.

از ترجمهٔ حل این مسئله که مربوط به هیئت ومفصل است صرف نظر می کنیم.

رجوع کنید به: عل ص۲۸ و ۲۹- سوتر A: ص۴۵ و ۴۶ و نیز صفحهٔ ۷۱ (در آنجا ترجمهٔ آلمانی این مسئله و راه حل آن را خواهید یافت) - چد: ص۷۲ تا ۷۴- چم: ص۱۲۳ تا ۱۲۵)

مسئلهٔ دوازدهم- مسئله‌یی است مربوط به علم هیأت که استاد آن را از کتاب «فی المسائل المفیده و الجوابات السدیده فی علل زیج الخوارزمی» تألیف خود (رجوع کنید به «بیرونی نامه» ص۷۱) استخراج و نقل کرده است.

عنوان مسئله در نسخهٔ «عل» چنین است: «معرفة القطعة المنکسفة من احد النیرین لی من کتابی فی المسائل المفیده و الجوابات السدیده فی علل زیج الخوارزمی».

از ترجمهٔ حل این مسئله که مربوط به علم هیأت و مفصل است صرف نظر می کنیم.

رجوع کنید به: عل: ص۲۹ و ۳۰- سوتر A: ص۴۶ تا ۴۸ و نیز صفحهٔ ۷۱ (ترجمهٔ آلمانی مسئله و حل آن را در آنجا خواهید یافت)- چد: ص۷۵ تا ۷۸ - چم: ص۱۲۵ تا ۱۲۷.

مسئلهٔ سیزدهم- برهانی است بر یک عمل نجومی.

عنوان مسئله در نسخهٔ «عل» چنین است: «برهان عمل محمد بن الصباح فی رصد الشمس» و در نسخه های چاپی چنین: «اقامة البرهان علی عمل لمحمد بن الصباح فی رصد المیل الاعظم».

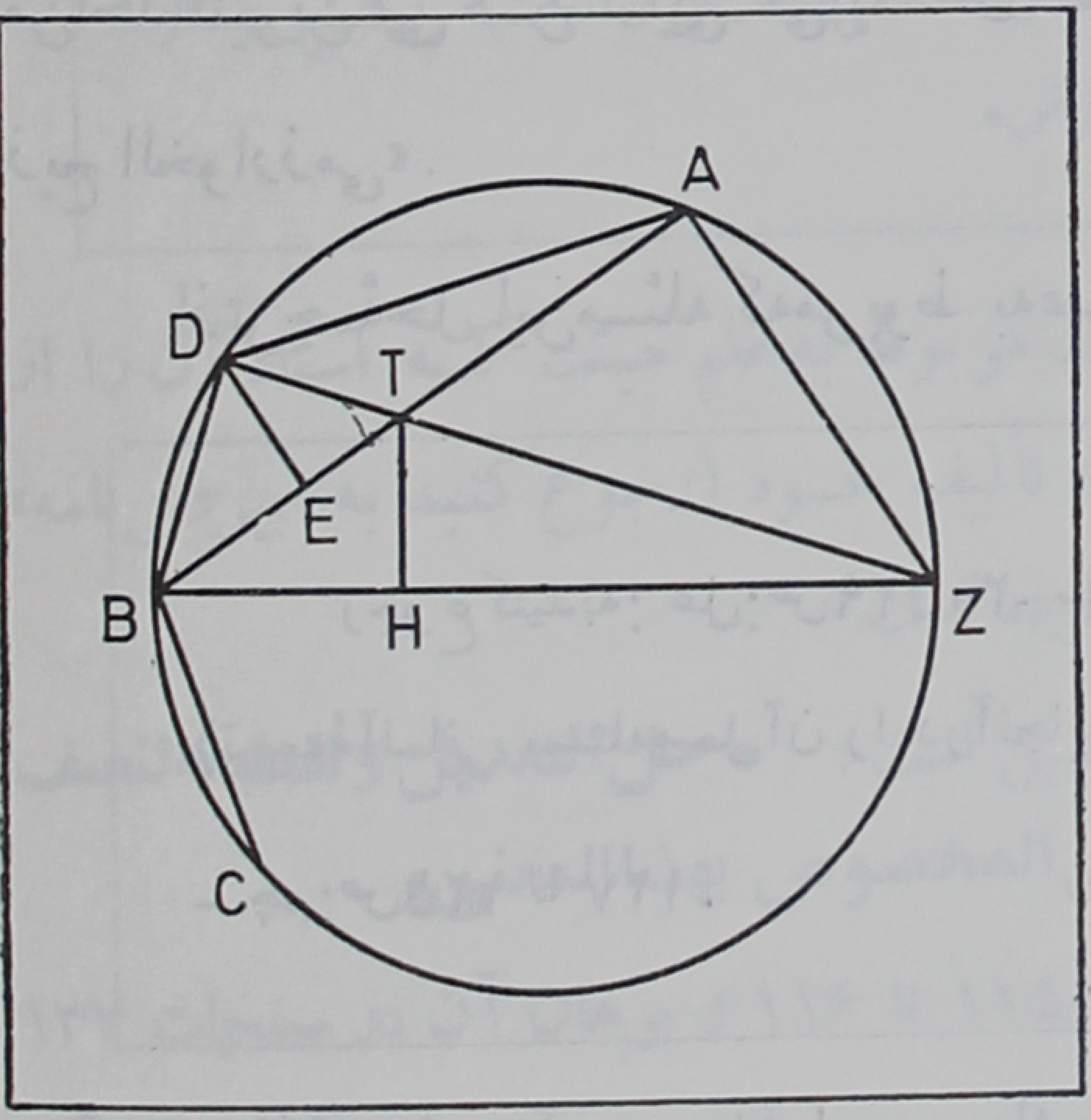
از ترجمهٔ حل این مسئله که مربوط به هیئت است صرف نظر می کنم.

رجوع کنید به: عل ص۳۱- سوتر A: ص۴۸ و۴۹-چد: ص ۶۷ تا ۶۹
- چم: ص۱۱۹ و ۱۲۰

مسئلهٔ چهاردهم(۱)- این مسئله به گفتهٔ استاد در محاسبهٔ ابعاد مورد نیاز واقع مـی‌شود واستاد آن را از مقالهٔ «فی دلالة الاثار العلویة علی الاحداث السفلیة» که‌خود نوشته بوده نقل کرده است(۲).

صورت مسئله این است:

دو مثلث ZAB و BDZ در رأسهای D و A قائم‌الزاویه هستند و در ضلع BZ مشترك مـی باشند. ازنقطهٔ تقاطع دو خط ZD و AB که آن را T می‌نامیم عمود TH را بر BZ فرود مـی آوریم. می‌خواهیم طول TH را به فرض آنکه اضلاع دو مثلث مذکور معلوم باشند حساب کنیم.



(شکل ۷۳)

راه حل استاد(۳)- اگر به قطر BZ دایره‌ای رسم کنیم این دایره ازنقاط A و D می گذرد. نقطهٔ A را به نقطهٔ D وصل می کنیم. طول AD برحسب اضلاع دومثلث ZAB و BDZ معلوم است زیـرا چهار ضلعی ADBZ محاطی است و

(نظر به قضیهٔ بطلمیوس) داریم:

$$AB \times DZ = AZ \times DB + AD \times BZ$$

دراین تساوی طول همهٔ پاره‌خطها بنا به فرض معلوم است مگر طول AD.

بنابراین طول AD از تساوی فوق معلوم می‌شود.

اکنون روی دایرهٔ محیطی دو مثلث کمان $\widehat{DBC}$ را مساوی با کمان $\widehat{AD}$ جدا می کنیم و از نقطهٔ D عمود DE را بر AB فرود می آوریم. خط شکستهٔ ABC در دایره محاط است و از نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ADC}$ عمود DE بر AB فرود آمده‌است. بنابراین نقطهٔ E وسط این خط شکسته است و (نظر به قضیهٔ دوم) داریم:

$$\overline{AD}^2 = AB \times BC + \overline{BD}^2$$

از تساوی فوق مقدار BC به‌دست می آید و بنابراین مقادیر AE و EB معلوم می‌شوند (وهمچنین می‌توان DE را از روی مثلث قائم‌الزاویهٔ BED حساب کرد) وچون زاویهٔ BDT قائمه و DE عمود بر BT است داریم:

$$BE \times ET = \overline{DE}^2$$

از روی این تساوی مقدار ET به دست می‌آید و بنابراین مقدار

$BT = BE + ET$ معلوم است.

ازطرف دیگر داریم:

$$\frac{TB}{TH} = \frac{ZB}{ZA}$$

وازروی این تناسب مقدار TH به دست می آید[۴].

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ چهاردهم:

(۱)- عل:ص۳۱- سوترA: ص۴۹ و نیزصفحهٔ ۷۲-چد:ص۷۹ و ۸۰ - چم : ص۱۲۸.

(۲)- عنوان این مسئله در نسخهٔ «عل» چنین است : «مسئلة احوج الیها معرفة الابعاد **لی** ، فی مقالتی فی دلالة الآثار العلویة علی الاحداث السفلیة »

(۳)- برای آنکه فهم این راه حل آسانتر باشد ، بدون آنکه در آن تغییری دهم بعضی از جمله‌های آن را پس و پیش کرده‌ام .

(۴)- ظاهراً چون استاد می‌خواسته است این مسئله را با استفاده ازخاصیت خط منکسر محاط دردایره حل کند این راه‌حل را اختیارکرده است وگرنه می‌توان مسئله را از راه سادهٔ زیر حل کرد (رجوع کنید به سوتر A : ص۷۲):

دومثلث THB و ZAB متشابه‌اندوداریم:

$$\frac{HB}{HT}=\frac{AB}{AZ} \qquad (۱)$$

ونیزدو مثلث THZ و BDZ متشابه‌اند وداریم:

$$\frac{HZ}{HT}=\frac{DZ}{DB} \qquad (۲)$$

ازجمع کردن دو تساوی(۱)و(۲) عضو به عضوحاصل می‌شود:

$$\frac{HB+HZ}{HT}=\left(\frac{BZ}{HT}\right)=\frac{AB}{AZ}+\frac{DZ}{DB}=\frac{AB\times DB+AZ\times DZ}{AZ\times DB}$$

و از آنجا:

$$HT=\frac{BZ\times AZ\times DB}{AB\times DB+AZ\times DZ}$$

مسئلهٔ پانزدهم - مسئله‌ای است مربوط به علم هیئت که استاد آن را از کتاب «فی ابطال البهتان بایرادالبرهان علی اعمال الخوارزمی» تألیف خود (رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحات ۷۱و۷۲) نقل کرده است .

عنوان مسئله در نسخهٔ «عل» چنین است : «معرفة قوس رجوع الکواکب من کتابی فی ابطال البهتان بایراد البرهان علی اعمال الخوارزمی»

از ترجمهٔ حل این مسئله که مربوط به هیئت است صرف نظر می کنیم .

رجوع کنید به: عل: ص۳۲- سوتر A: ص۵۰ و نیز ص۷۲- چد: ص۷۸ و۷۹- چم ص۱۲۷و۱۲۸

***

در پایان این مسایل در نسخهٔ «عل» این عبارت آمده است :

« وقد یمکن الی وجود المطلوب سلوك طریق اسهل من الذی یتفق فی الوقت الّا ان الغرض فی صرفها الی امر واحد هوالا بانة عن محل خاصتین المذکورتین من هذه الصناعة والارشاد الی کیفیة التصرف فیها »

همین عبارت با اندك اختلافی در نسخهٔ چد (صفحهٔ ۸۴) و در نسخهٔ چم (ص۱۳۳) نیز آمده است . خلاصهٔ معنی عبارت مذکور این است : «برای این مسایل راه حلهای ساده‌تری از آنچه ذکر کردیم وجود دارد. اما غرض ما فقط این بود که مورد استعمال خاصیتهای خط شکستهٔ محاط در دایره و چگونگی تصرف در آنها را نشان دهیم»

ج ـ مسائل مربوط به محاسبهٔ وترهای دایره

مسائلی که از این به‌بعد می‌آید همه مربوط به‌محاسبهٔ وترهای دایره است. به‌همین‌دلیل استاد برای این قسمت از کتاب عنوان زیر را انتخاب کرده است:

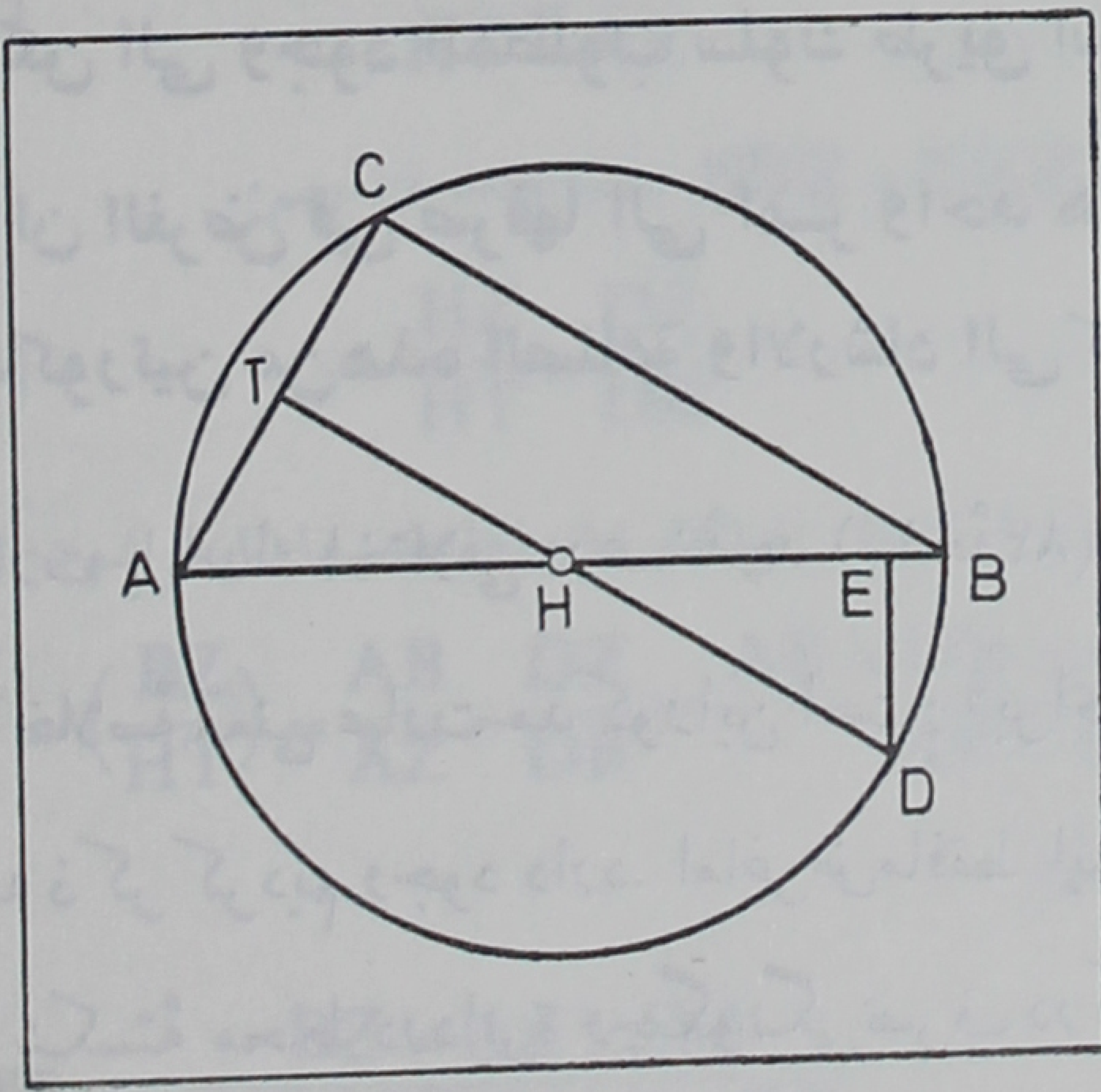
استعمال خاصیة الخط المنحنی فی استخراج أوتار القسی فی الدایرة المعلومة القطر

ودر آغاز این فصل افزوده است: «واذ قد تقدم ذکرما وقع به الوعد فی اول الکلام فانی اعود الی تمام الایجاد واقول...»

مسئلهٔ شانزدهم(۱)ـ محاسبهٔ وتر مکمل کمانی که وتر آن معلوم باشد(۲) (از استاد) (۳)

هر کمان از دایرهٔ به قطر معلوم کـه وتر آن معلوم باشد وتر مکمل آن نیز معلوم است.

مثال: اگر وتر BC معلوم وقطر دایره که آن را AB می‌نامیم نیز معلوم باشد وتر AC معلوم است.



(شکل ۷۴)

برهان[۴]**-** کمان $\widehat{ABC}$ را در نقطهٔ D نصف می کنیم و از نقطهٔ D عمود DE را بر قطر AB و عمود HT (یعنی DT) را بر وتر AC فرود می آوریم و فصل مشترك DT را با قطر AB نقطهٔ H می نامیم. همانگونه که در مسئلهٔ دهم گفتیم (چون نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$ است DT عمود منصف وتر AC است و بنا بر این از مرکز دایره می گذرد. پس) نقطهٔ H مرکز دایره است[۵].

دو مثلث قائم الزاویهٔ HED و HTA (در حالت وتر و یك زاویهٔ حاده) متساویند و بنا بر این

$$ED = AT$$

از طرف دیگر چون عمود DE بر قطر AB فرود آمده است داریم:

$$\frac{AE}{ED} = \frac{ED}{EB} \qquad (۱)$$

(این مطلب با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویهٔ ADB که DE ارتفاع وارد بر وتر آن است واضح می باشد)

اما بنا به قضیهٔ اول داریم:

$$AE = \frac{AB + BC}{۲} \quad \text{و} \quad EB = \frac{AB - BC}{۲}$$

و دیدیم که $DE = AT$ بنا بر این رابطهٔ (۱) را می توان چنین نوشت:

$$\overline{AT}^{۲} = \left(\frac{AB + BC}{۲}\right) \times \left(\frac{AB - BC}{۲}\right)$$

پس AT یعنی نصف وتر AC و بنا بر این خود AC نیز معلوم است و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

(از آنچه گذشت دستور زیر برای محاسبهٔ وتر AC برحسب قطر AB و وتر BC به دست می‌آید) :

دستور[۶]: $$AC = ۲\sqrt{\left(\frac{AB+BC}{۲}\right)\left(\frac{AB-BC}{۲}\right)}$$

(استاد دراینجاافزوده است:) این دستور اگرچه طولانی است ولی (عملا) از دستور $AC = \sqrt{\overline{AB}^۲ - \overline{BC}^۲}$ آسان‌تر است[۷].

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ شانزدهم:

(۱)- عل: ص۳۲و۳۳- سوترA: ص۵۱وص۷۲-چد: ص۸۷-چم: ص ۱۳۷و۱۳۸- ونیزرجوع کنیدبه «بیرونی‌نامه»: ص۳۰۶تا۳۰۸شمارهٔ۶/۳۴ .

(۲)-عنوان این مسئله در نسخهٔ «عل» چنین است: «معرفةوترتمام کل‌قوس معلومة الوتر الی نصف الدایرة **لی** » - اما درنسخه های چاپی « استخراج الاوتار » و درکتاب « قانون مسعودی » (جلداول صفحهٔ۲۸۰) به‌جای کلمهٔ «تمام» کلمهٔ «تتمة»آمده واین‌درست‌تراست.زیرا تمام‌قوس‌همان است که امروزمتمم قوس می‌نامیم (رجوع کنیدبه«بیرونی‌نامه»: صفحهٔ۱۰۲ شمارهٔ۳/۳۰) - ونیزرجوع کنیدبه‌یادداشت شمارهٔ۲ ذیل مسئلهٔ بیستم.

(۳)- چنانکه دریادداشت فوق ملاحظه‌می‌شود استاد با افزودن کلمهٔ «لی» درنسخهٔ «عل» این‌راه‌حل‌را ازخود دانسته‌است.

(۴)- اگرقطردایره ،که‌آن را AB می‌نامیم، و وتر BC معلوم‌باشد واضح است که می‌توان وترAC یعنی وتر کمان مکمل کمان $\widehat{BC}$را ازروی مثلث قائم‌الزاویهٔ BAC به آسانی به دست آورد:

$AC = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}$ واحتیاجی به استدلالی که استاد ذکر کرده است نیست. ظاهراً وی خواسته است این مسئله را نیز با استفاده ازخاصیت خط شکستهٔ محاط در دایره (یعنی قضیهٔ اول) حل کند. علاوه بر این خود وی درپایان حل مسئله دلیلی برای ترجیح این راه حل ذکر کرده وشاید به همین دلیل بوده است که درباب دوم ازمقالهٔ سوم کتاب «قانون مسعودی» نیز همین راه حل راآورده است (رجوع کنید به «بیرونی نامه» :ص۳۰۶ به بعد)

(۵)ـ دراینجا درترجمهٔ عبارت متن عربی مختصر تغییری دادم تامطلب بهتر مفهوم شود.

(۶)ـ مقایسه کنید با دستوری که استاد برای حل همین مسئله در کتاب «قانون مسعودی» ذکر کرده است («بیرونی نامه»:ص۳۰۶ شمارهٔ ۶/۳۴).

(۷)ـ علت این سهولت این است که قدما محاسبات را دردستگاه شمار شصتگانی انجام می دادند و عمل ضرب (یا به قوهٔ۲ رساندن) در آن دستگاه مشکلتر از عمل ضرب در دستگاه شمار دهگانی است. دستوری که استاد داده است علاوه برجمع وتفریق که آسان می باشد مشتمل بریک عمل ضرب ویک استخراج جذر است و حال آنکه برای به کاربردن دستور:

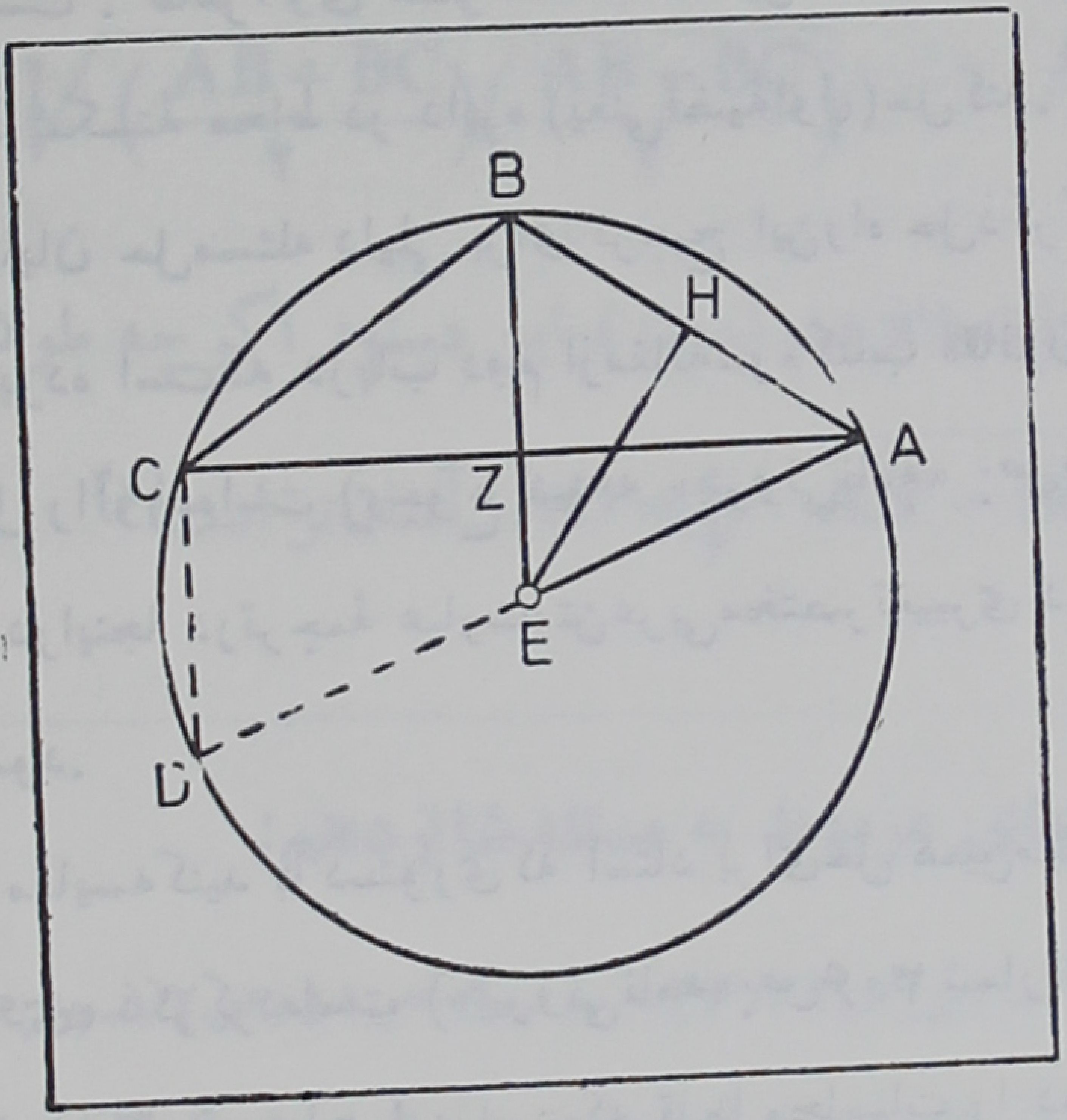
$AC = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}$ دو عمل ضرب (به قوهٔ۲ رساندن) ویک عمل جذر لازم است (رجوع کنید به «سوتر A»:ص۷۲ شمارهٔ ۱۶).

مسئلهٔ هفدهم(۱)ـ محاسبهٔ وتر دو برابر کمانی که وتر آن معلوم باشد(۲).

(دربارهٔ این مسئله رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحات ۳۰۸ تا ۳۱۰)

هر کمان از دایرهٔ به قطر معلوم که وتر آن معلوم باشد وتر دو برابر آن نیز معلوم است.

مثال:۱ اگر وتر AB معلوم و کمان $\widehat{BC}$ مساوی با کمان $\widehat{AB}$ باشد می‌خواهیم وتر AC را حساب کنیم.



(شکل ۷۵)

راه‌حل اول ازاستاد(۳) - شعاع EB را رسم کرده فصل مشترك آن را با AC نقطهٔ Z می‌نامیم و AE را وصل می کنیم . (نظر به‌قضیهٔ مربوط به مربع ضلع مقابل به‌زاویهٔ حادهٔ B در مثلث ABE) داریم :

$$\overline{AE}^{۲} = \overline{AB}^{۲} + \overline{BE}^{۲} - ۲BE \times BZ$$

و چون $AE = BE$ پس :

$$\overline{AB}^{۲} = ۲BE \times BZ \qquad (۱)$$

بنابراین BZ معلوم است . اما $EZ = EB - BZ$ پس EZ معلوم است.

از طرف دیگر EZ مساوی است با نصف وتر مکمل کمان $\widehat{AC}$ یعنی نصف CD (زیرا اگر قطر AED را رسم کنیم معلوم می‌شود که ZE نصف CD است و کمان $\widehat{CD}$

مکمل کمان $\widehat{AC}$ می‌باشد) بنابراین CD معلوم است (وازروی مثلث قائم الزاویهٔ ACDمی‌توان AC راحساب کرد.)

به‌عبارت روشنتر: ازتساوف(۱) نتیجه‌می‌شود:

$$BZ = \frac{\overline{AB}^{۲}}{۲r}$$

و از طرف دیگر

$$ZE = BE - BZ = r - \frac{\overline{AB}^{۲}}{۲r}$$

پس

$$CD = ۲ZE = ۲\left(r - \frac{\overline{AB}^{۲}}{۲r}\right)$$

وازمثلث قائم‌الزاویه ACD نتیجه می‌شود:

$$\overline{AC}^{۲} = \overline{AD}^{۲} - \overline{CD}^{۲}$$

یعنی

$$\overline{AC}^{۲} = (۲r)^{۲} - ۴\left(r - \frac{\overline{AB}^{۲}}{۲r}\right)$$

پس AC معلوم است

دستور (۴)**ـ** (عبارتی را که استاد برای محاسبهٔ وترAC برحسب‌قطرووتر معلوم AB نوشته است(۵) می‌توان، به فرض اینکه شعاع دایره r باشد، به شکل زیر نوشت):

$$AC = \sqrt{(۲r)^{۲} - ۴\left(r - \frac{\overline{AB}^{۲}}{۲r}\right)^{۲}}$$

و رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۶).

راه‌حل دوم از استاد(۷)**-** از مرکز دایره یعنی E عمود EH را بر وتر معلوم AB فرودمی‌آوریم. دوزاویهٔ BAZ و BEH متساویندوزوایای به‌رأس H و Z قائمه هستند پس‌دومثلث BAZ و BEH متشابهند و داریم:

$$\frac{AB}{AZ}=\frac{EB}{EH}$$

پس AZ معلوم است $\left(AZ = \frac{AB \times EH}{EB}\right)$ و دو برابر آن یعنی AC نیز معلوم می‌باشد.

دستور - (عبارتی‌راکه استاد برای‌محاسبهٔ AC برحسب قطرووترمعلوم AB نوشته‌است(۸) می‌توان به‌فرض اینکه شعاع دایره r باشدبه‌شکل زیرنوشت):

$$AC = \frac{۲\,AB\sqrt{\frac{(۲r)^{۲} - \overline{AB}^{۲}}{۴}}}{r}$$

و رجوع کنید به‌یادداشت شمارهٔ (۹)

یادداشتهای مربوط به‌مسئلهٔ هفدهم:

(۱)- عل: ص۳۳-سوتر A: ص۵۲ و ص۷۳-چد: ص۸۸- چم: ص۱۳۹

(۲)- عنوان این‌مسئله درنسخهٔ «عل» چنین است: « معرفة وترضعف کل‌قوس معلومة الوتر لی » - درنسخه‌های چد وچم این مسئله و مسئلهٔ هجدهم یک‌جا با عنوان زیرآمده است: «معرفة وترضعف کل قوس معلومة الوترومعرفة نصف‌القوس المعلومة الوتروان لم تظهرفیه اثار هذه‌الخواص بالفعل» - مقصود ازجملهٔ «وان لم‌تظهرفیه ...» این‌است که، درحل‌این دو

مسئله ، قضایای مربوط به خاصیت خط شکسته محاط در دایره استفاده نشده است .

(۳)ـ اولاچنانکه دریادداشت فوق مشاهده‌می‌شود استاد با افزودن کلمهٔ**لی** به‌آخر عنوان مسئله (در نسخهٔ«عل») این‌راه‌حل را ازخود دانسته است. ثانیاً این‌راه‌حل‌درنسخه‌های‌چاپی‌نیست ـ درنسخه‌های‌چاپی فقط راه‌حل دوم هست .

(۴)ـ استاد دستور ساده‌تری برای حل این مسئله در کتاب « قانون مسعودی» بیان‌کرده است. رجوع کنیدبه«بیرونی‌نامه»صفحات۳۰۸ تا۳۱۰.

(۵)ـ عبارت‌عربی این دستوروترجمهٔآن به‌زبان ریاضی‌این است:

حسابه : نضرب الوتر المعلوم فی‌نفسه $\left[\overline{AB}^{۲}\right]$ ونقسم‌نصف‌ما‌بلغ علی نصف‌القطر $\left[\frac{\overline{AB}^{۲}}{۲r}\right]$ فما خرج نلقیه من نصف القطر $\left(r-\frac{\overline{AB}^{۲}}{۲r}\right)$

ثم نضعف ما‌بقی و نضرب فی‌نفسه $\left[۴\left(r-\frac{\overline{AB}^{۲}}{۲r}\right)\right]$ ونسقط‌ما‌اجتمع

من مضروب القطر فی نفسه $\left[(۲r)^{۲}-۴\left(r-\frac{\overline{AB}^{۲}}{۲r}\right)^{۲}\right]$ و ناخذ

جذر ماتبقی $\left[\sqrt{(۲r)^{۲}-۴\left(r-\frac{\overline{AB}^{۲}}{۲r}\right)^{۲}}\right]$ فیکون وترضعف قوس الوتر المفروض .

(۶) اگر زاویهٔ AEB را α بنامیم دستور محاسبهٔ AC را می‌توان به شکل زیرنوشت :

$$۲r\, sin\, \alpha = \sqrt{۴r^{۲}-۴\left(r-\frac{۴r^{۲} sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}}{۲r}\right)^{۲}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(1-2\sin^{2}\frac{\alpha}{2}\right)^{2}} = \sqrt{4\sin^{2}\frac{\alpha}{2} - 4\sin^{4}\frac{\alpha}{2}}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin^{2}\frac{\alpha}{2}} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

یعنی همان دستور مثلثاتی $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ (سوتر A : ص۷۳)

(۷)- استاد درآغاز این دستور (در نسخهٔ « عل ») نوشته است :
«طریق آخر فی ذلك لی».

(۸)- عبارت عربی این دستور و ترجمهٔ آن به زبان ریاضی این است:

حسابه: نضرب الوتر المعلوم فی نفسه $\left[\overline{AB}^{2}\right]$ ونلقی ما اجتمع من مضروب القطر فی نفسه $\left[(2r)^{2} - \overline{AB}^{2}\right]$ وناخذ جذر ربع مابقی

$$\left[\sqrt{\frac{(2r)^{2} - \overline{AB}^{2}}{4}}\right]$$

و نضربه فی الوتر المعلوم و نقسم المبلغ علی نصف القطر

$$\left[\frac{AB\sqrt{\frac{(2r)^{2} - \overline{AB}^{2}}{4}}}{r}\right]$$

فما خرج من القسمة نضعفه فیحصل وتر ضعف قوس الوتر المفروض.

(۹)- اگرزاویهٔ AEB را α بنامیم دستورمحاسبهٔ AC رامی‌توان به شکل زیرنوشت :

$$2r\sin\alpha = \frac{4r\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{r^{2} - r^{2}\sin^{2}\frac{\alpha}{2}}}{r}$$

$$= \frac{۴r^{۲} \sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{r}$$

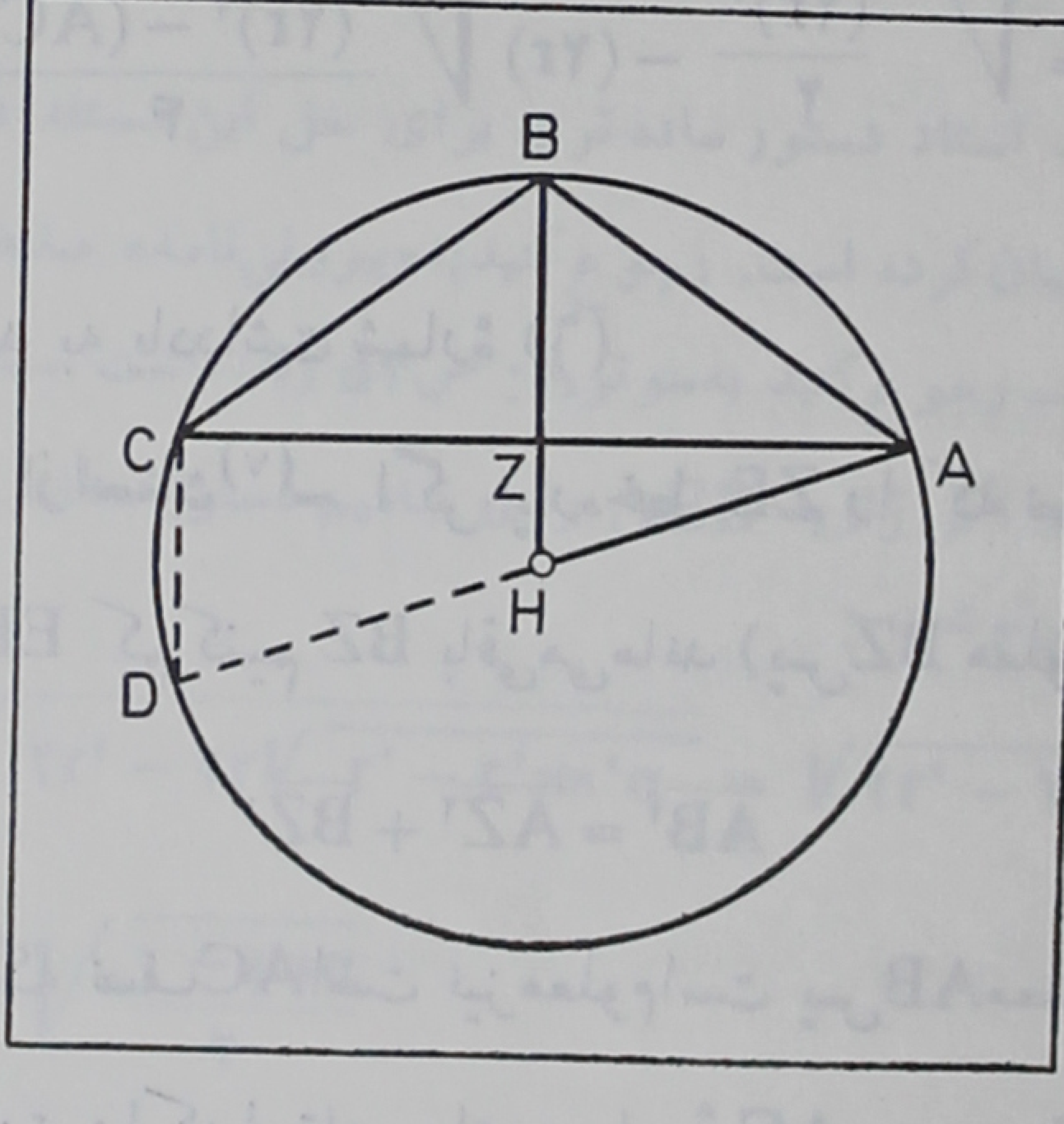
و یا
$$\sin\alpha = ۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}$$

مسئلهٔ هجدهم(۱)ـ محاسبهٔ وتر نصف کمانی که وتر آن معلوم باشد(۲).

(دربارهٔ این مسئله نیز رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحات ۳۱۰ تا ۳۱۲)

هر کمان از دایرهٔ به قطر معلوم که وتر آن معلوم باشد وتر نصف آن نیز معلوم است.

مثال: اگر وتر AC معلوم و کمان $\widehat{AB}$ مساوی با کمان $\widehat{BC}$ باشد می‌خواهیم وتر AB را حساب کنیم.



(شکل ۷۶)

راه‌حل اول از استاد[۳]**ـ** شعاع EB را رسم کرده فصل مشترک آن را با وتر AC نقطهٔ Z می‌نامیم و AE را رسم می کنیم. (نظر به قضیهٔ مربوط به مربع ضلع مقابل به زاویهٔ حادهٔ E در مثلث AEB) داریم:

$$\overline{AB}^{۲} = \overline{AE}^{۲} + \overline{BE}^{۲} - ۲BE \times ZE \qquad (۱)$$

وچون AE و BE (شعاعهای دایره) معلوم و ZE نیز که نصف وتر مکمل کمان $\widehat{AC}$ است معلوم می‌باشد (رجوع کنید به مسئلهٔ هفدهم) پس AB معلوم است .

دستور [۴]**ـ** عبارتی که استاد برای محاسبهٔ وتر AB برحسب قطر دایره و وتر معلوم AC نوشته است در نسخهٔ «عل» ناقص است و صحیح آن را به فرض اینکه شعاع دایره r باشد می‌توان چنین نوشت[۵]:

$$AB = \sqrt{\frac{(۲r)^{۲}}{۲} - (۲r)\sqrt{\frac{(۲r)^{۲} - (\overline{AC})^{۲}}{۴}}}$$

و رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (٦)

راه‌حل دوم از استاد[۷]**ـ** اگر پاره‌خط ZE را که نصف وتر مکمل قوس $\widehat{AC}$ است از شعاع EB کم کنیم BZ باقی‌می‌ماند (پس BZ معلوم‌است) وداریم :

$$\overline{AB}^{۲} = \overline{AZ}^{۲} + \overline{BZ}^{۲}$$

(وچون AZ که نصف AC است نیز معلوم‌است پس AB معلوم می باشد)

دستور ـ(عبارتی را که استاد برای محاسبهٔ AC برحسب قطر و وتر معلوم AC

نوشته‌است(۸) می‌توان به‌صورت زیر درآورد) :

$$AB = \sqrt{\left(\frac{۲r - \sqrt{(۲r)^۲ - \overline{AC}^۲}}{۲}\right)^۲ + \frac{\overline{AC}^۲}{۴}}$$

ورجوع کنید به‌یادداشت شماره(۹)

یادداشت‌های مربوط به مسئلهٔ هجدهم :

(۱)- عل :ص ۳۳و۳۴-سوترA :ص۵۲و۵۳ ویادداشت شمارهٔ ۱۸ ص۷۳- چد:ص۸۸ و۸۹-چم: ص۱۴۰ .

(۲)- عنوان این‌مسئله درنسخهٔ«عل»چنین‌است:«معرفة وترنصف کل قوس معلومة الوترلی»- ورجوع کنید به‌یادداشت‌شمارهٔ۲مسئلهٔ هفدهم.

(۳)- اولا چنانکه دریادداشت شمارهٔ۲مشاهده‌می‌شود استادباافزودن کلمهٔ **لی** به‌آخر عنوان مسئله (در نسخهٔ «عل») این راه حل را از خود دانسته است .

ثانیاً این راه‌حل درنسخه‌های چاپی‌نیست - درنسخه‌های‌چاپی‌فقط راه حل‌دوم هست .

(۴)- استاد دستور ساده تری برای حل این مسئله درکتاب «قانـون مسعودی» بیان‌کرده است. رجوع کنیدبه«بیرونی‌نامه» صفحات ۳۱۰ تا۳۱۲.

(۵)- رجوع کنید به‌سوترA: ص۵۳ (یادداشت شمارهٔ ۳ ذیل‌صفحه)

(۶)- اگر زاویهٔ AEB را α بنامیم دستور محاسبهٔ ABرامی‌توان به‌شکل زیرنوشت :

$$۲r\sin\frac{\alpha}{۲} = \sqrt{۲r^۲ - ۲r\sqrt{r^۲ - r^۲\sin^۲\alpha}} = \sqrt{۲r^۲ - ۲r^۲\cos\alpha}$$

ویا

$$\sin\frac{\alpha}{۲} = \sqrt{\frac{۱ - \cos\alpha}{۲}}$$

(۷)- استاد در آغاز این دستور (در نسخهٔ «عل») نوشته است: «طریق آخر فی ذلك لی.»

(۸)- عبارت عربی این دستور (پس از تصحیح) و ترجمهٔ آن به زبان ریاضی این است:

حسابه: نضرب الوتر المعلوم فی نفسه $(\overline{AC}^2)$ و نلقی ما اجتمع من مضروب القطر فی نفسه $\left[(2r)^2-\overline{AC}^2\right]$ و ننقص جذر مایبقی من القطر $\left[2r-\sqrt{(2r)^2-\overline{AC}^2}\right]$ ونضرب نصف مایبقی فی مثله $\left[\left(\frac{2r-\sqrt{(2r)^2-\overline{AC}^2}}{2}\right)^2\right]$ و نزید المبلغ علی مضروب نصف الوتر المعلوم فی نفسه $\left[\left(\frac{2r-\sqrt{(2r)^2-\overline{AC}^2}}{2}\right)^2+\frac{\overline{AC}^2}{4}\right]$ فما بلغ ناخذ جذره فیکون وتر النصف المطلوب.

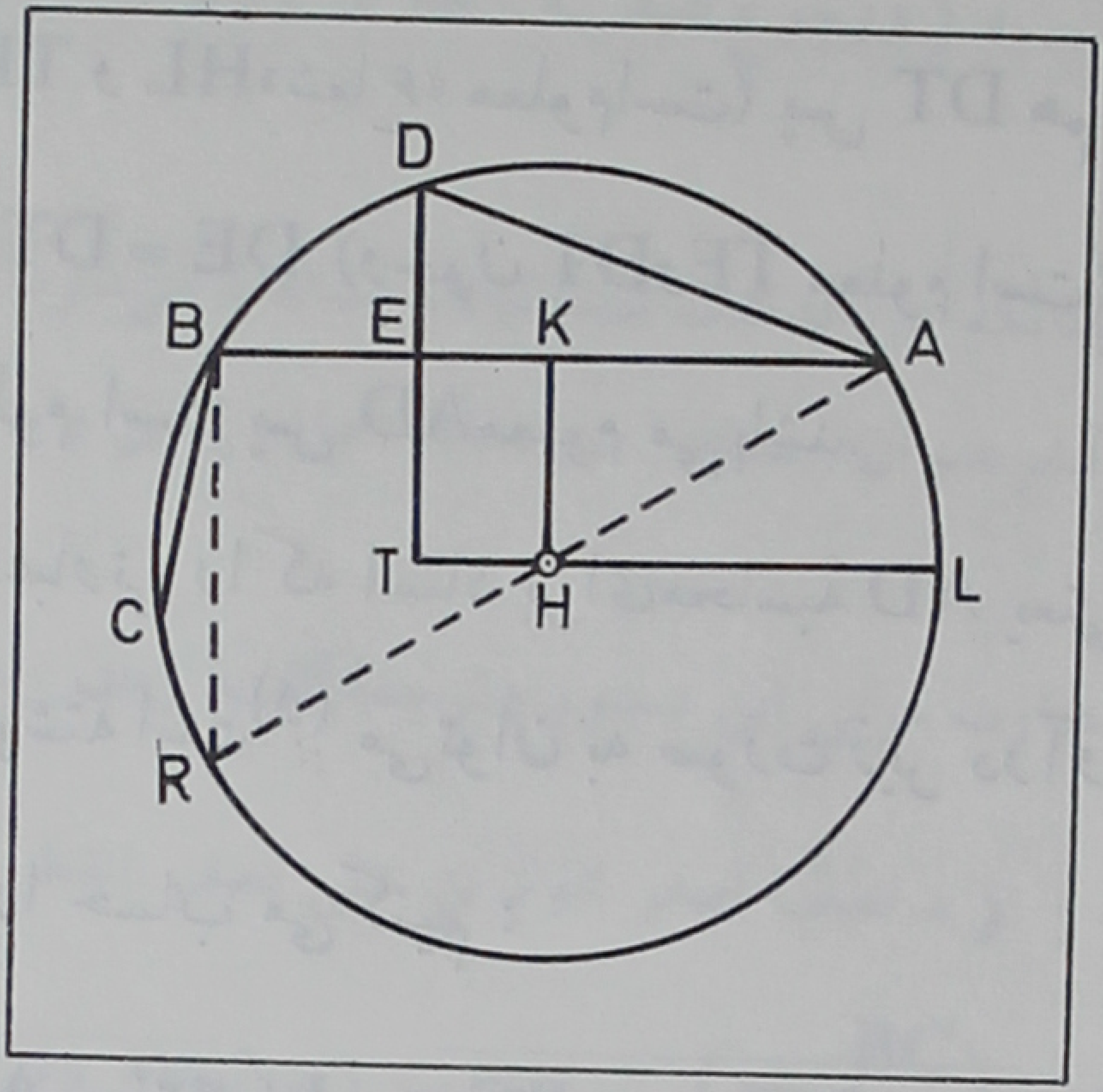
(۹)- این دستور نیز مانند دستور اول به صورت رابطهٔ مثلثاتی زیر درمی‌آید:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

مسئلهٔ نوزدهم(۱)- محاسبهٔ وتر نصف مجموع دو کمان که وترهای آنها معلوم باشد(۲).

هر دو کمان از دایرهٔ به قطر معلوم که وترهای آنها معلوم باشد وتر نصف مجموعشان نیز معلوم است.

مثال: اگر وترهای AB و BC معلوم باشند و کمان $\widehat{AD}$ مساوی با کمان $\widehat{DC}$ باشد می‌خواهیم وتر AD را حساب کنیم(۳).



(شکل ۷۷)

راه حل از استاد(۴)ـ از نقطهٔ D (که وسط کمان ABC است) عمود DE را بر AB فرود می‌آوریم و از مرکز دایره که آن‌را H می‌نامیم عمودهای HT و HK را (به‌ترتیب بر خط راست DE و خط راست AB) رسم می‌کنیم.

واضح است که HK نصف وتر مکمل کمان $\widehat{AB}$ است و TE با آن مساوی است. (برای اینکه این مطلب روی شکل دیده شود کافی است قطر AHR را رسم کرده ملاحظه کنیم که HK نصف BR است و کمان $\widehat{BR}$ مکمل کمان $\widehat{AB}$ می‌باشدـ تساوی TE = HR نتیجهٔ مستطیل بودن شکل EKHT است) پس TE معلوم است.

ازطرف دیگر داریم: $AE = \frac{AB + BC}{۲}$ (بنا به‌قضیهٔ اول) پس AE معلوم است و $KE = \frac{BC}{۲}$ (زیرا $KE = AE - AK = AE - \frac{AB}{۲} = \frac{BC}{۲}$) پس KE هم معلوم است.

اکنون مطابق با شکل پاره خط THL را رسم می کنیم. واضح است که:

$\overline{DT}^{۲} = TL(\text{قطر} - TL)$ (قوت نقطهٔ T نسبت به دایره)

(و چون TH و HL «شعاع» معلوم است) پس DT هم معلوم است.

اما $DE = DT - TE$ (وچون DT و TE معلوم است) پس DE معلوم است

وچون AE نیز معلوم است پس AD معلوم می باشد.

دستور- (عبارتی را که استاد برای محاسبهٔ AD یعنی وتر نصف مجموع دو کمان $\widehat{AB}$ و $\widehat{BC}$ نوشته است(۵) می توان به صورت زیر درآورد):

ابتدا DE را حساب می کنیم:

$$DE = \sqrt{\left(r + \frac{BC}{۲}\right)\left(r - \frac{BC}{۲}\right)} - \sqrt{\frac{۴r^{۲} - \overline{AB}^{۲}}{۴}}$$

وسپس AD را به دست می آوریم؛

$$AD = \sqrt{\overline{DE}^{۲} + \left(\frac{AB + BC}{۲}\right)^{۲}}$$

ورجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۶)

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ نوزدهم:

(۱)- عل: ص ۳۴ و ۳۵- سوتر A: ص ۵۳ و ۵۴ و ص ۷۳ و ۷۴- چد: ص ۹۲ و ۹۳- چم: ص ۱۴۴.

(۲)- عنوان عربی این مسئله در نسخهٔ «عل» چنین است: «معرفة وتر نصف مجموع قوسین معلومتی الوترین لی»

(۳)- در نسخه های چاپی در ابتدای حل این مسئله عبارت زیر آمده است (و این عبارت در نسخهٔ «عل» نیست): « متی ماعلم وترمجموعهما عرف

بالتنصیف المتقدم وترنصف مجموعها ... » . یعنی هرگاه وترمجموع دو کمان معلوم باشد می‌توان با استفاده ازمسئلهٔهجدهم وترنصف مجموعشان را حساب کرد ...» (ورجوع کنید به آنچه در پایان یادداشت شمارهٔ (۶) نوشته‌ام .

(۴)- چنانکه دریادداشت شمارهٔ(۲) مشاهده می‌شود استادباافزودن کلمهٔ **لی** به آخرعنوان مسئله (درنسخهٔ «عل») این راه حل را ازخود دانسته است .

(۵)- عبارت عربی این دستور وترجمهٔآن به زبان ریاضی این است:

حسابه : نزید نصف اصغر الوترین علی نصف القطر $\left(r+\frac{BC}{۲}\right)$ ثم نضرب (درنسخهٔ «عل» ننقص نوشته شده وغلط است) الزاید فی‌الناقص و نحفظجذرالمجتمع :

وننقصه ایضامنه $\left(r-\frac{BC}{۲}\right)$

$\left[\sqrt{\left(r+\frac{BC}{۲}\right)\left(r-\frac{BC}{۲}\right)}\right]$ ونسقط مضروب اعظم الوترین‌فی‌نفسه من مضروب القطرفی نفسه وناخذ جذر ربع مابقی $\left(\sqrt{\frac{۴r^۲-AB^۲}{۴}}\right)$ فنلقیه‌من‌المحفوظ

$$\left[\sqrt{\left(r+\frac{BC}{۲}\right)\left(r-\frac{BC}{۲}\right)}-\sqrt{\frac{۴r^۲-AB^۲}{۴}}\right]$$

(این مقدارمساوی‌با DE است و ازاین به بعد به جای آن DE را به‌کار خواهم برد) ثم نضرب الباقی فی‌نفسه $(\overline{DE}^۲)$ و نزیده علی مضروب نصف المجموع الوترین فی‌نفسه وناخذ جذر الجمله:

$$\left[\sqrt{\overline{DE}^۲+\left(\frac{AB+BC}{۲}\right)^۲}\right]$$

فیکون وتر نصف مجموع القوسین المعلومتی الوترین .

(۶)- اگر کمان $\widehat{AB}$ را α و کمان $\widehat{BC}$ را β بنامیم می‌توان دستور محاسبهٔ AD را به‌صورت یک‌تساوی مثلثاتی درآورد (←سوتر A: ص۷۴):

$$AB = ۲r\sin\frac{\alpha}{۲} \quad و \quad \sqrt{r^۲ - \frac{\overline{AB}^۲}{۴}} = r\cos\frac{\alpha}{۲}$$

$$BC = ۲r\sin\frac{\beta}{۲} \quad و \quad \sqrt{r^۲ - \frac{\overline{BC}^۲}{۴}} = r\cos\frac{\beta}{۲}$$

بنابراین :

$$DE = r\cos\frac{\beta}{۲} - r\cos\frac{\alpha}{۲}$$

و ازآنجا :

$$AD = \sqrt{\left(r\cos\frac{\beta}{۲} - r\cos\frac{\alpha}{۲}\right)^۲ + \left(r\sin\frac{\alpha}{۲} + r\sin\frac{\beta}{۲}\right)^۲}$$

و یا :

$$۲r\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{۴}\right) = \sqrt{۲r^۲ - ۲r^۲\left(\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\beta}{۲} - \sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}\right)}$$

و یا

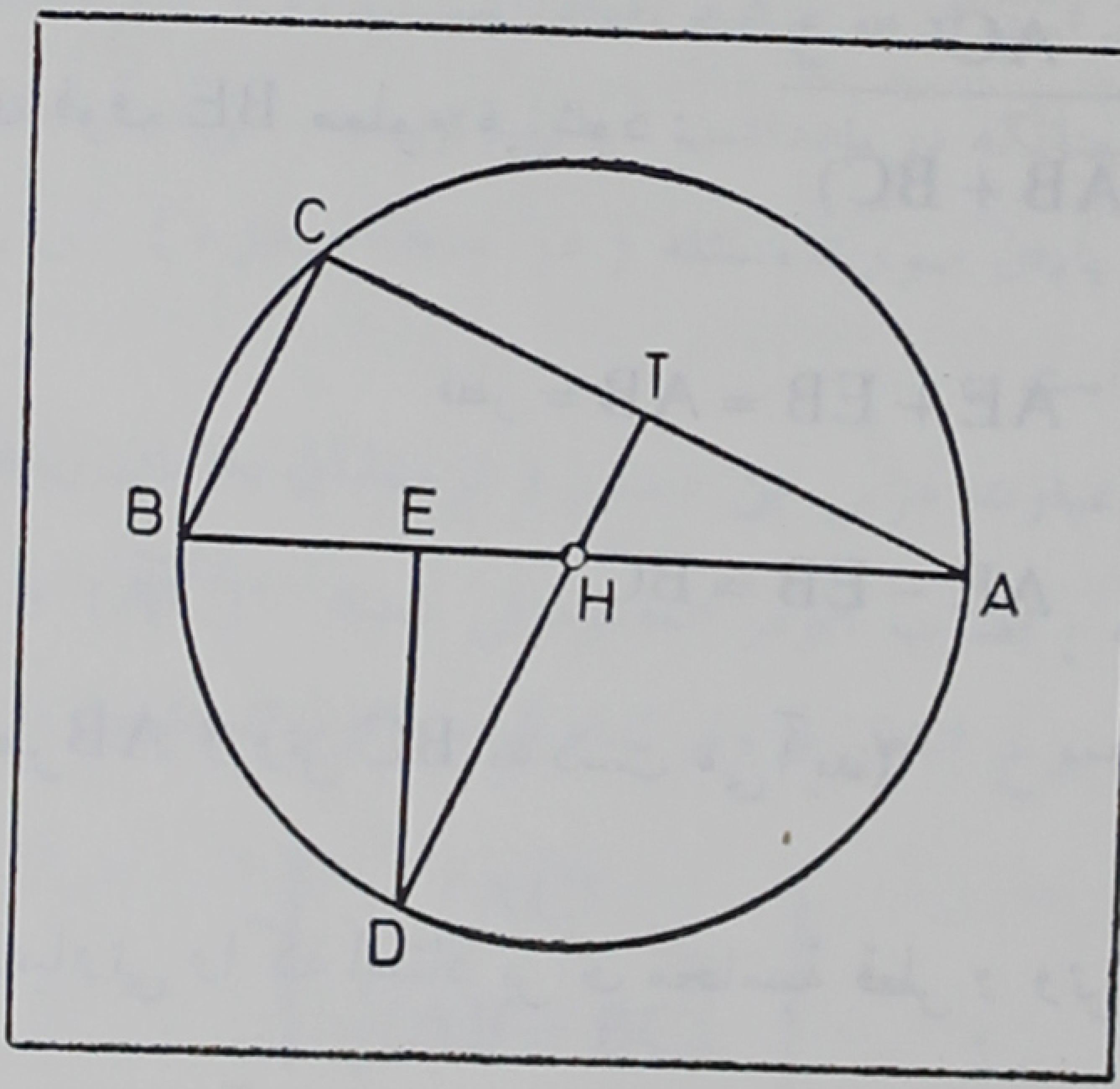
$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{۴}\right) = \sqrt{\frac{۱-\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)}{۲}}$$

واین‌همان دستور مثلثاتی $\sin\frac{A}{۲} = \sqrt{\frac{۱-\cos A}{۲}}$ است که در مسئلهٔ هجدهم به آن رسیدیم؟. به‌همین دلیل است که استاد این مسئله را در کتاب «قانون‌مسعودی» ذکر نکرده‌است. زیرا-ر آن کتاب بنای وی بر اختصار بوده وفقط دستورهای مهم‌راشرح داده‌است.

مسئلهٔ بیستم(۱) ـ محاسبهٔ وتر مکمل کمانی که وتر آن معلوم است هرگاه مجموع قطر دایره ووتر مکمل کمان معلوم باشد ولی هرکدام از آنها به تنهایی مجهول باشد(۲).

این مسئله عملا مورد استعمالی برای محاسبهٔ وترهای دایره ندارد. ظاهراً استاد خواسته است با حل این مسئله نشان دهد که خاصیت خط شکستهٔ محاط در دایره (= قضیهٔ اول) چگونه موجب سهولت حل بعضی از مسایل می‌شود.

راه حل از استاد(۳)ـ این مسئله به مسئلهٔ چوب (مسئلهٔ دهم) بازمیگردد. فرض می کنیم که وتر کمان $\widehat{AC}$ معلوم و نیز مجموع وتر کمان $\widehat{CB}$، که مکمل کمان $\widehat{AC}$ است، با قطر AB معلوم باشد اما AB و BC هریك به تنهایی مجهول باشند (ومی‌خواهیم وتر BC را حساب کنیم).



(شکل ۷۸)

وسط کمان $A\widehat{B}C$ را نقطهٔ D می‌نامیم واز نقطهٔ D عمود DE را بر (قطر) AB و عمود DT را بر AC فرود می‌آوریم و فصل مشترك آن را بـا AB نقطهٔ H می‌نامیم . همچنانکه قبلا ثابت کردیم (درمسئلهٔ شانزدهم) نقطهٔ H مرکز دایره است و $AT = DE$ (نظر به تساوی دو مثلث DEH و ATH) وداریم :

$$\frac{AE}{DE} = \frac{DE}{BE}$$

(زیرا DE ارتفاع مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD است ـ که دوضلع آن روی شکل رسم نشده است .)

ویا :

$$\frac{\frac{1}{2}(AB + BC)}{DE} = \frac{DE}{BE}$$

(چون $DE = AT = \frac{AC}{2}$ معلوم و نیز $\frac{1}{2}(AB + BC)$ معلوم است

بنا براین ازتساوی فوق BE معلوم می‌شود : $BE = \frac{\overline{AC}^2}{\frac{1}{2}(AB + BC)}$)

و داریم :

$$AE + EB = AB = \text{قطر}$$

و

$$AE - EB = BC$$

(بنا براین قطر AB و وتر BC به دست می‌آید)

دستور ـ (عبارتی را که استاد برای محاسبهٔ قطر و وتر BC نوشته‌است[۴] می‌توان به صورت زیر درآورد. برای آنکه این دستور ساده شود مجموع معلوم

$AB + BC$ را s و طول معلوم وتر AC را l می‌نامیم. دراین صورت) :

$$\text{قطر} = AB = \frac{s}{2} + \frac{l^2}{\left(\frac{s}{2}\right)}$$

و

$$BC = \frac{s}{2} - \frac{l^2}{\left(\frac{s}{2}\right)}$$

یادداشت‌های مربوط به مسئلهٔ بیستم:

۱- عل : ص۳۵- سوتر A : ص۵۴ و ۵۵ - چد : ص۱۰۱و۱۰۲ - چم : ص۱۵۵ تا ۱۵۷ .

(۲)- صورت این مسئله درنسخهٔ «عل» چنین است: «معرفة وتر تمام قوس معلومة الوتر الی نصف الدایرة اذا کان مجموع قطر الدایرة ووتر التمام معلوماً و کل واحد منهما بانفراده مجهولا **لی**»

درنسخه‌های چاپی به‌جای «وتر تمام قوس» اصطلاح «وتر تتمهٔ قوس» به کار رفته که درست‌تر است (رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ ۲ ذیل مسئلهٔ شانزدهم).

(۳)- چنانکه در یادداشت شمارهٔ (۲) دیده می‌شود استاد با افزودن کلمهٔ **لی** در پایان صورت مسئله (در نسخهٔ « عل») این راه حل را از خود دانسته است .

(۴)- عبارت عربی این دستور و ترجمهٔ آن به‌زبان ریاضی این است: حسابه : نضرب الوتر المعلوم فی نفسه $(\overline{AC})^2$ و نقسم ما بلغ علی نصف مجموع القطر و وتر تمام قوس الوتر المعلوم:

$$\left[\frac{\overline{AC}^2}{\frac{1}{2}(AB + BC)}\right]$$

فما خرج (یعنی مقدار BE) فهو الذی ان زدناه علی ذلك النصف المقسوم علیه اجتمع القطر :

$$AB = \frac{1}{2}(AB+BC) + \frac{\overline{AC}^2}{\frac{1}{2}(AB+BC)}$$

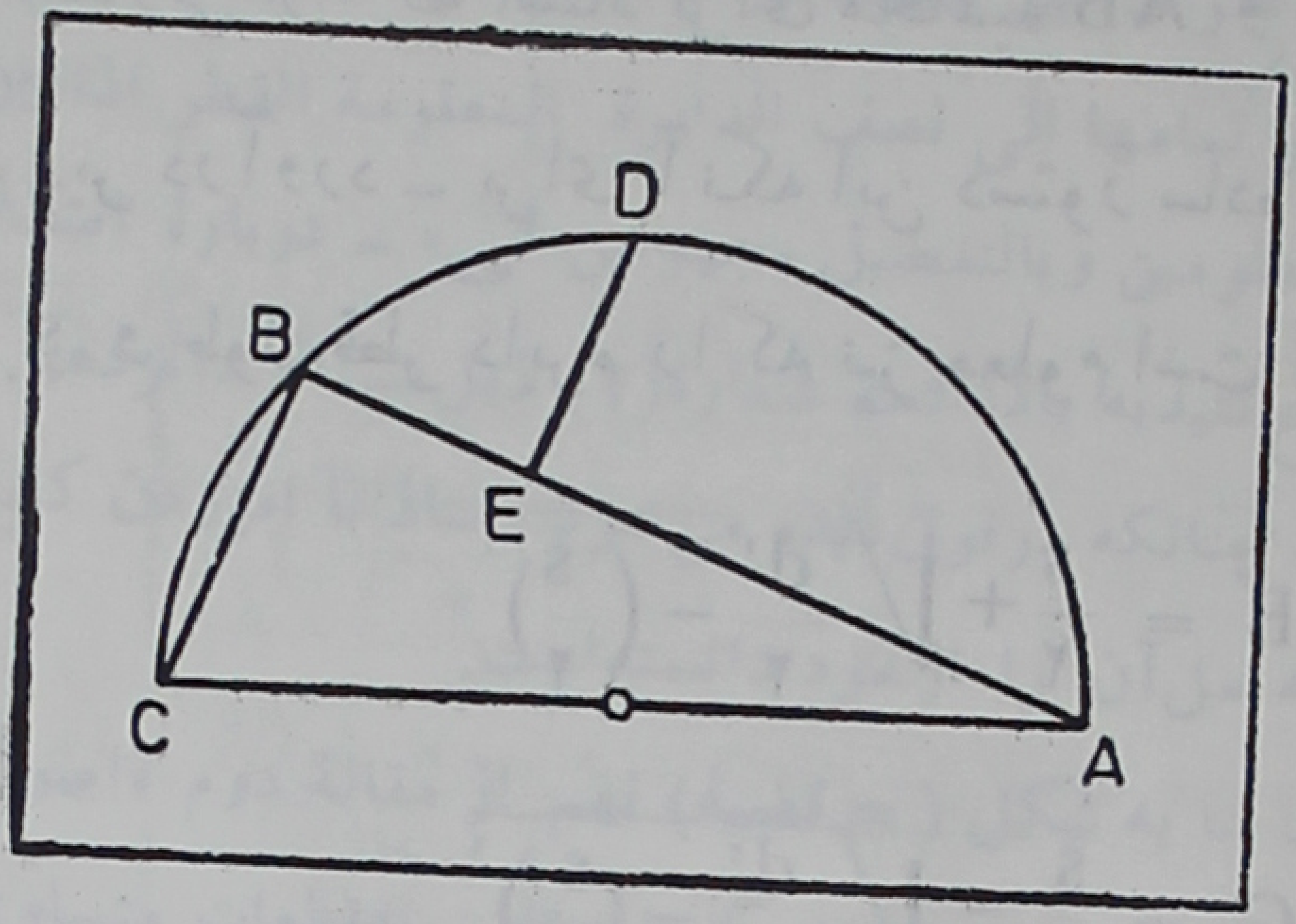
و ان نقصناه منه حصل وتر تمام قوس الوتر المعلوم الی نصف الدایرة :

$$BC = \frac{1}{2}(AB+BC) - \frac{\overline{AC}^2}{\frac{1}{2}(AB+BC)}$$

مسئلهٔ بیست ویکم(۱) ـ محاسبهٔ وتر یك کمان و وتر کمان مکمل آن به فرض آنکه قطر دایره معلوم و مجموع دو وتر مذکور نیز معلوم باشد ولی آن دو وتر جداگانه معلوم نباشند (۲).

این مسئله مانند مسئلهٔ بیستم مورد استعمال عملی برای محاسبهٔ وترهای دایره ندارد. با این حال ازاین جهت جالب توجه است که حل آن به حل یك دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی منجر می‌شود که به‌وسیلهٔ خاصیت اول خط شکستهٔ محاط در دایره (= قضیهٔ اول) بسیار آسان حل می‌شود. رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۶).

راه حل اول از استاد(۳)ـ مثلا فرض می کنیم قطر AC معلوم ومجموع دو وتر AB و BC نیز معلوم باشد و می‌خواهیم هریك از این دو وتر را حساب کنیم.



(شکل ۷۹)

کمان $\widehat{ABC}$ را در نقطهٔ D نصف می کنیم و از نقطهٔ D عمود DE را بر AB (وتر بزرگتر) فرود می‌آوریم. چون خط شکستهٔ ABC در نقطهٔ E نصف می‌شود و AB بنا به فرض بزرگتر از BC است داریم[۴] :

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{EB}^2 \qquad (1)$$

از طرف دیگر (در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC) داریم:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \qquad (2)$$

از تساوی (۱)و(۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{2}\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 \qquad (3)$$

اما $\overline{AE}^2$ معلوم‌است، زیرا $AE = \frac{AB + BC}{2}$ ، بنابر این EB از روی تساوی (۳) که در آن $\overline{AC}^2$ نیز معلوم است به دست می آید. حال اگر EB را با AE جمع کنیم AB حاصل می‌شود و اگر EB را از AE کم کنیم BC به دست می‌آید.

و این‌همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

دستور - (عبارتی را که استاد برای محاسبهٔ AB و BC نوشته است[۵] می‌توان به صورت زیر درآورد - برای آنکه این دستور ساده شود مجموع معلوم AB + BC را s و طول قطر دایره را که نیز معلوم است d می‌نامیم. در این صورت) :

$$AB = \frac{s}{۲} + \sqrt{\frac{d^۲}{۲} - \left(\frac{s}{۲}\right)^۲}$$

و

$$BC = \frac{s}{۲} - \sqrt{\frac{d^۲}{۲} - \left(\frac{s}{۲}\right)^۲}$$

تبصره- استاد در دنبال این دستور (در نسخهٔ «عل») راه‌حل دیگری از خود ذکر کرده و در آغاز آن نوشته است: «وجه آخر فی معرفة ذلك لی». ولی در واقع این همان راه اول است که در آن رابطهٔ (۳) را به صورت:

$\overline{AC}^۲ = ۲\overline{AE}^۲ + ۲\overline{EB}^۲$ نوشته است و از روی آن $۲\overline{EB}^۲$ و درنتیجه EB را استخراج کرده است.

جالب توجه است که در نسخه‌های چاپی این راه حل از راه حل اول جدا نشده وفقط مطلب فوق به صورت تبصره‌ای نوشته شده و با جملهٔ «وان شئنا ...» یعنی «و اگر بخواهیم ...» شروع می‌شود.

(رجوع کنید به چد: ص ۱۰۳ سطر دوم به بعد - چم: ص ۱۵۸ سطر چهارم به بعد.)

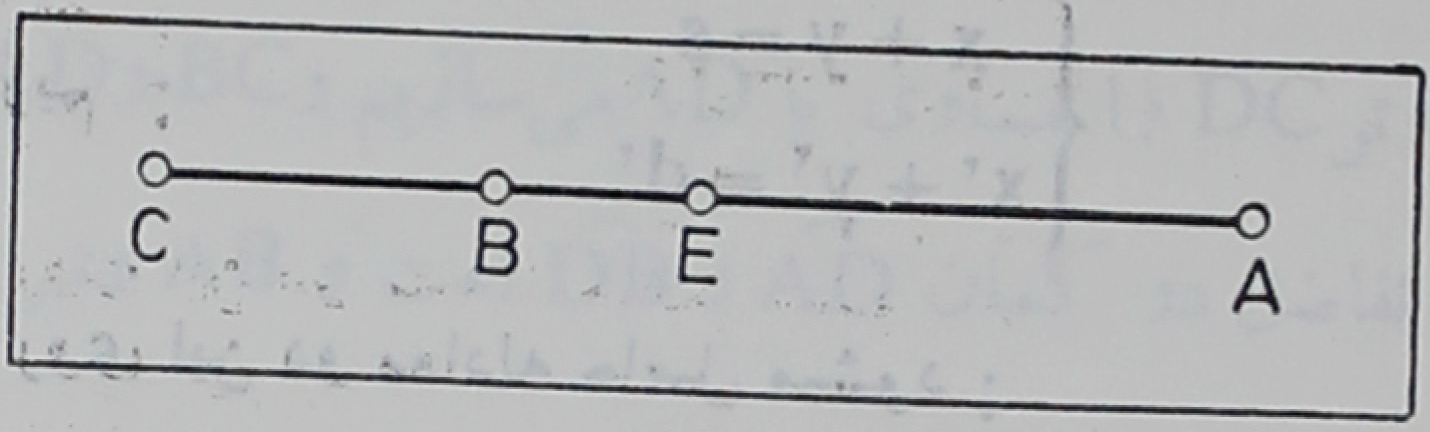
یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ بیست و یکم :

(۱)- عل: ص ۳۵ و ۳۶- سوتر A: ص ۵۵ و ۷۴- چد: ص ۱۰۲ و ۱۰۳ - چم: ص ۱۵۷ تا ۱۵۹.

(۲)ـ عنوان این مسئله در نسخهٔ «عل» چنین است: «معرفة وتر القوس و وتر تمامها الی نصف الدایرة المعلومة القطر اذا کان الـوتـران بمجموعها معلومین و بالتفصیل مجهولین لی» ـ دربارهٔ اصطلاح «وترتمام قوس» رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ(۲) ذیل مسئلهٔ شانزدهم.

(۳)ـ چنانکه درفوق دیده می‌شود استاد با افزودن کلمهٔ **لی** درآخر صورت مسئله حل آن را ازخود دانسته است.

(۴)ـ بنا به شکل (= قضیهٔ) نهم از مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس» که ترجمهٔ فارسی آن چنین است: «هرگاه پاره‌خطی به قطعات متساوی و نامتساوی تقسیم شود مجموع مربعات قطعات نامتساوی مساوی است بـا دو برابر مربع نصف پاره خط به علاوهٔ دو برابر مربع قطعه‌ای که بین دو نقطهٔ تقسیم واقع است.»



(شکل ۸۰)

مثلا در شکل فوق نقطهٔ E وسط پـاره خط AC و نقطهٔ B نقطهٔ دلخواهی ازآن پاره‌خط است وداریم:

$$\overline{AB}^{۲} + \overline{BC}^{۲} = ۲\overline{AE}^{۲} + ۲\overline{BE}^{۲}$$

(برای استدلال قضیهٔ فوق رجوع کنید به «هیث: سیزده مقاله» جلد اول صفحهٔ ۳۹۲).

(۵)ـ عبارت عربی این دستور و ترجمهٔ آن به‌زبان ریاضی این است: حسابه: نضرب نصف مجموع ذانك الوترین فی نفسه $\left[\left(\frac{AB+BC}{۲}\right)^{۲}\right]$ ونلقی ما اجتمع من نصف مضروب القطرفی نفسه

و ناخذ جذر مابقی $\left[\sqrt{\frac{AB^2}{2}-\left(\frac{AB+BC}{2}\right)^2}\right]$

وان اردنا الوتر الاطول زدنا هذا الجذر علی نصف مجموع الوترین فیجتمع

الوتر الاطول $\left[\frac{AB+BC}{2}+\sqrt{\frac{AB^2}{2}-\left(\frac{AB+BC}{2}\right)^2}\right]$

وان اردنا الوتر الاقصر نقصنا هذا الجذر من نصف مجموعها فیحصل

الوتر الاقصر $\left[\frac{AB+BC}{2}-\sqrt{\frac{AB^2}{2}-\left(\frac{AB+BC}{2}\right)^2}\right]$

(۶)- حل این مسئله از راه جبری این است:

اگر فرض کنیم $AB=x$ و $BC=y$ و $AC=d$ و $AB+BC=s$

داریم :
$$\begin{cases} x+y=s \\ x^2+y^2=d^2 \end{cases}$$

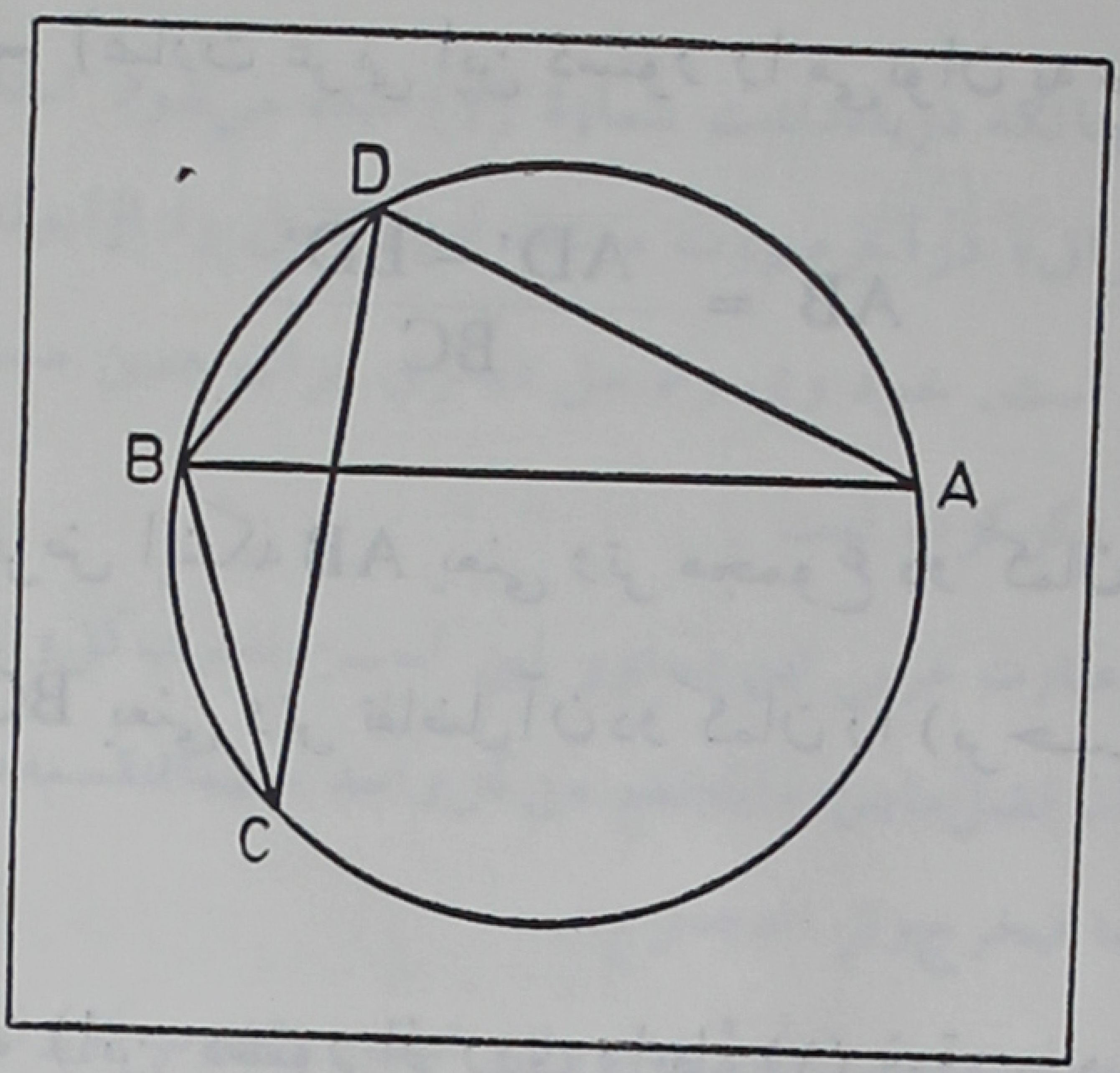
از روی این دو معادله حاصل میشود :

$$x=\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{d^2}{2}-\frac{s^2}{4}} \quad \text{و} \quad y=\frac{s}{2}-\sqrt{\frac{d^2}{2}-\frac{s^2}{4}}$$

که همان دستورهایی است که استاد داده است (سوتر A: ص۷۴)

مسئلهٔ بیست ودوم(۱)- محاسبهٔ وتر تفاضل دو کمان که وترهای آنها معلوم است برحسب وتر مجموع آن دو کمان - و محاسبهٔ وتر مجموع دو کمان که وترهای آنها معلوم است برحسب وتر تفاضلشان (۲).

(این مسئله و مسئلهٔ بیست وسوم یکی است)



(شکل ۸۱)

راه حل از ابو نصر بن عراق[۳] - (اولاً) فرض می کنیم که دو وتر AD و DB معلوم باشند و وتر DC را مساوی با AD می سازیم و BC و AD را رسم می کنیم. بنابراین BC وتر تفاضل دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{DB}$ است و AB وتر مجموع آن دو کمان می باشد.

(اکنون می گوییم که اولاً) به فرض اینکه وتر BC یعنی وتر تفاضل دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{DB}$ معلوم باشد می خواهیم AB یعنی وتر مجموع آن دو کمان را (بر حسب AD و DB و BC) حساب کنیم:

(نظر به قضیهٔ دوم) معلوم است که:

$$\overline{AD}^2 = AB \times BC + \overline{BD}^2 \quad (1)$$

بنابراین:

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = AB \times BC$$

وچون (AD و BD و) BC معلوم است AB از تساوی فوق به دست می آید.

دستور(۴)- (عبارت عربی این دستور را می‌توان به صورت زیر در آورد) :

$$AB = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{BC}$$

(ثانیاً) به فرض اینکه AB یعنی وتر مجموع دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{DC}$ معلوم باشد می‌خواهیم BC یعنی وتر تفاضل آن دو کمان را (بر حسب AD و DC و AB) حساب کنیم :

دستور(۵)- (این دستور از روی رابطهٔ (۱) فوق به دست می آید و عبارت عربی آن را می‌توان به‌شکل زیر ترجمه کرد) :

$$BC = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB}$$

و رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۶).

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ بیست و دوم :

(۱)- عل : ص ۳۶ - سوتر A : ص ۵۶ و ص ۷۴- چد : ص۹۸ - چم: ص۱۵۲ .

(۲)- صورت این مسئله درنسخهٔ «عل» چنین است: «معرفة وترفضل مابین قوسین معلومتی‌الوتر من قبل وتر مجموعهما ووترمجموعهمامن قبل وتر تفاضلها لابی‌نصربن عراق.

اما درنسخه های چاپی صورت این‌مسئله چنین است: «وله (مقصود ابونصرعراق‌است) فی‌استخراج احد هما من‌الآخرطریق‌آخراورده فی‌الکتاب المذکور (مقصودکتاب المجسطی‌الشاهی‌است) » .

(۳)- چنانکه دریادداشت شمارهٔ (۲) دیده می‌شود استاد با افزودن «لابی نصر بن عراق» درآخرصورت مسئله این راه‌حل را ازابونصر بن علی بن عراق دانسته است. خود وی راه حل دیگری برای همین مسئله در مسئلهٔ بیست و سوم ذکر کرده است.

(۴)- عبارت عربی این دستور این است: «نضرب کل واحدمن الوترین فی نفسه وناخذ فضل مابین مایجتمع من کل واحد منهمافنقسمه علی وتر فضل مابین قوسیهما فیخرج وتر المجموع».

(۵)- عبارت عربی این دستوراین است: «نضرب کل واحد من الوترین فی نفسه و ناخذ فضل مابین المجتمعین فنقسمه علی وتر مجموع قوسیهما فنخرج وتر التفاضل».

(۶)- اگر اندازه های دوکمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{BD}$ رابرحسب رادیان به‌ترتیب α و β نامیم رابطهٔ $\overline{AD}^۲ = AB \times BC + \overline{BD}^۲$ را می‌توان چنین نوشت (← سوتر A: ص ۷۴)

$$۴r^۲ \sin^۲ \frac{\alpha}{۲} = ۲r \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right) \times ۲r \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{۲}\right) + ۴r^۲ \sin^۲ \frac{\beta}{۲}$$

ویا:

$$\sin^۲ \frac{\alpha}{۲} = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{۲}\right) + \sin^۲ \frac{\beta}{۲}$$

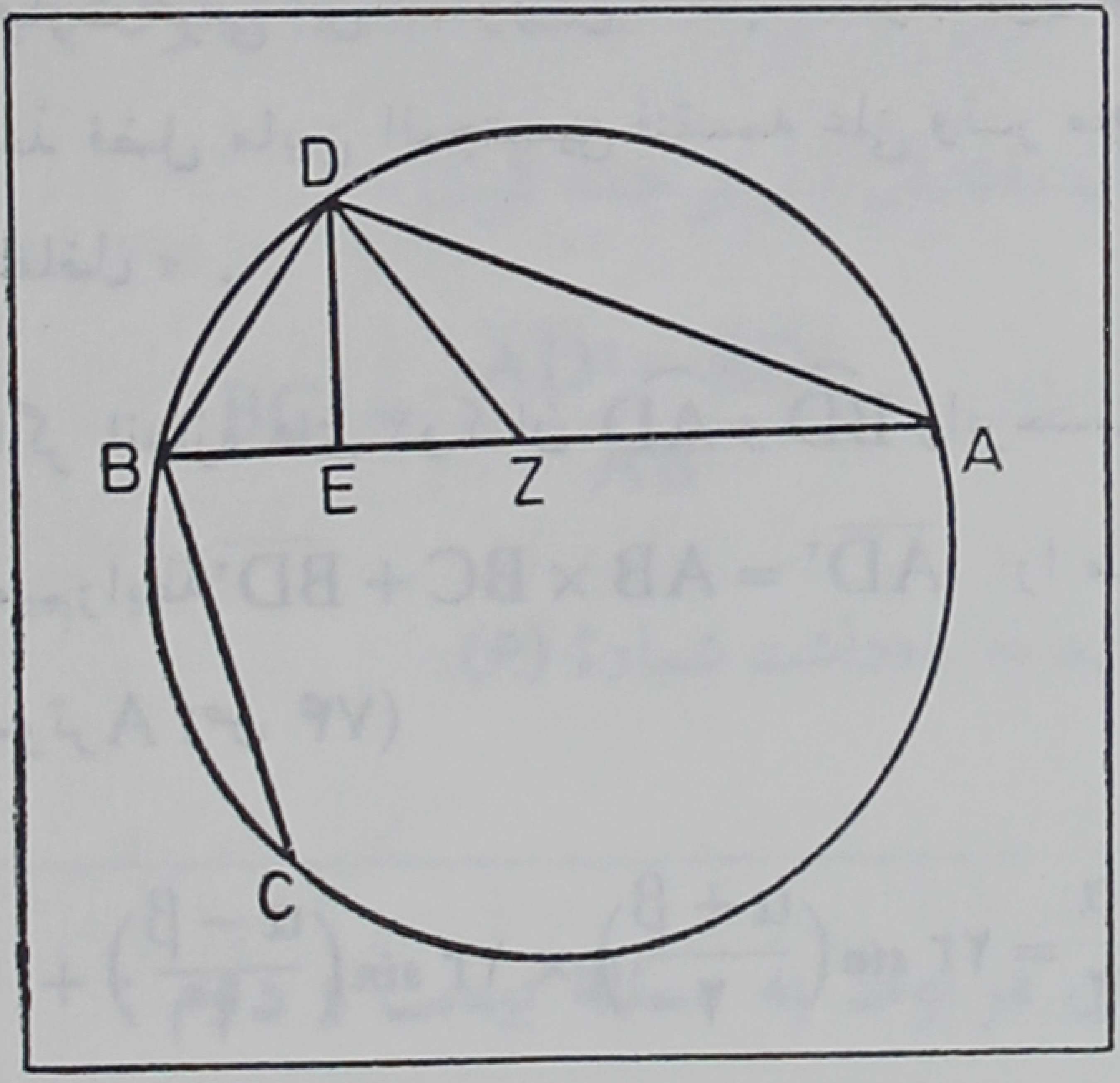
و ازآنجا دو دستور زیر به دست می‌آید:

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right) = \frac{\sin^۲ \frac{\alpha}{۲} - \sin^۲ \frac{\beta}{۲}}{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{۲}\right)}$$

و

$$\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{۲}\right)=\frac{\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}-\sin^{۲}\frac{\beta}{۲}}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)}$$

مسئلهٔ بیست وسوم [۱] – (همان مسئلهٔ بیست ودوم است که استاد راه‌حلی برای آن ازخود ذکر کرده است) – **محاسبهٔ وتر مجموع و وتر تفاضل (دو کمان) یکی از روی دیگری** (۲).



(شکل ۸۲)

راه حل از استاد (۳) – فرض می کنیم وترهای AD و DB معلوم باشند و وتر مجموع دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{DB}$ یعنی وتر AB نیز معلوم باشد و می‌خواهیم وتر تفاضل دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{BC}$ یعنی وتر BC را حساب کنیم.

از نقطهٔ D عمود DE را بر AB فرود می‌آوریم. (نظر به قضیهٔ مربوط به مربع ضلع مقابل به زاویهٔ حاده درمثلث) داریم:

$$\overline{AD}^{۲}=\overline{AB}^{۲}+\overline{BD}^{۲}-۲AB\times BE$$

بنابراین:

$$BE = \frac{\overline{AB}^{2} - (\overline{AD}^{2} - \overline{BD}^{2})}{2AB}$$

(پس BE معلوم است) . اما (نظر به قضیهٔ اول) داریم :

$$BE = \frac{AB - BC}{2}$$

بنابراین:

$$BC = AB - 2BE$$

(وچون AB و BE معلوم است پس BC به دست می آید.)

دستور - (عبارت عربی این دستور هم در نسخهٔ «عل» وهم در نسخه های چاپی ناقص است و افتادگی دارد(۴). سوتر متوجه این افتادگی شده ولی آقای احمد سعیدالدامرداش در نسخهٔ چاپ مصر متوجه آن نشده است . در هرصورت دستور صحیح این است) :

$$BC = AB - \frac{\overline{AB}^{2} - (\overline{AD}^{2} - \overline{BD}^{2})}{AB}$$

رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۵) .

واگر وتر BC یعنی وتر تفاضل دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{DB}$ معلوم باشد وبخواهیم وتر AB را که وتر مجموع آن دو کمان است به دست آوریم از روی EA پاره خط EZ را مساوی با BE جدا می کنیم و D را به Z وصل می نماییم . واضح است که دراین صورت $DZ = DB$ (ونظر به قضیهٔ مربوط به مربع ضلع مقابل

به زاویهٔ منفرجه درمثلث) داریم :

$$\overline{AD}^{2} = \overline{DZ}^{2} + \overline{AZ}^{2} + 2AZ \times EZ$$

و چون $2EZ = BZ$ پس :

$$\overline{AD}^{2} = \overline{DZ}^{2} + \overline{AZ}^{2} + AZ \times BZ$$

و از آنجا : $BZ = \frac{\overline{AD}^{2} - (\overline{DZ}^{2} + \overline{AZ}^{2})}{AZ}$ و چون $DZ = BD$

و $AZ = BC$ پس $BZ = \frac{\overline{AD}^{2} - (\overline{BD}^{2} + \overline{BC}^{2})}{BC}$

پس BZ معلوم است [و می‌دانیم که $AB = BZ + BC$ پس AB به دست می‌آید].

دستور (۶) ـ (عبارت عربی این دستور را می‌توان به صورت زیر ترجمه کرد) :

$$AB = BC + \frac{\overline{AD}^{2} - (\overline{BD}^{2} + \overline{BC}^{2})}{BC}$$

و رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۷)

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ بیست و سوم :

(۱)- عل: ص۳۶- سوتر A: ص ۵۶ و ۵۷ و نیز ص ۷۴ و ۷۵- چد : ص۹۹ و ۱۰۰- چم : ص۱۵۳ و ۱۵۴

(۲)- صورت این مسئله در نسخهٔ «عل» چنین است: «معرفة وتر المجموع ووتر التفاضل بعضها من بعض لی» ـ این همان مسئلهٔ بیست و دوم است که

در اینجا صورت آن مختصرتر بیان شده واستاد راه حلی برای آن از خود ذکر کرده است . در نسخه‌های چاپی در آغاز حل این مسئله از قول استاد آمده است : « قلت فی بعض المقالات التی احتجت الی هذا المعنی فیها...)

(۳)- چنانکه دریادداشت شمارهٔ (۲) ملاحظه می‌شود استاد باافزودن کلمهٔ **لی** به‌آخرصورت مسئله این راه حل را ازخود دانسته‌است.

(۴)- عبارت عربی این دستور پس ازتصحیح لازم‌چنین‌است: «نضرب کل‌واحد من‌الوترین فی نفسه و ننقص‌اقل مایجتمع من‌اکثرها (ونلقی‌المبلغ من مضروب الوتر الاطول فی‌نفسه)ونقسم‌ما یبقی علی‌وتر مجموع قوسیها فما خرج‌نلقی ضعفه من‌وتر المجموع فیبقی وتر‌التفاضل» .

(جمله‌ای راکه درپرانتزها نوشته‌ام‌درمتن‌عربی‌نیست).

(۵)- اگر این دستور را ساده کنیم همان دستوری به‌دست می‌آید.که استاد ازقول ابونصرعراق‌درمسئلهٔ بیست ودوم ذکر کرده است یعنی

$$BC = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB}$$

ومعلوم نیست چرا استاد دستور ابونصر عراق را که ساده است به صورت پیچیده‌ای که درمتن دیده می‌شود درآورده است .

(۶)- عبارت عربی این دستورچنین است: « نضرب کل‌واحدمن‌الوتر الاقصر و وتر‌التفاضل فی‌نفسه ونجمعها و نلقی المبلغ من مضروب الوتر الاطول فی‌نفسه ونقسم مایبقی علی وتر التفاضل فما خرج نزیده علی وتر التفاضل فیجتمع وترمجموع‌قوسیهما.»

(۷)- این دستور نیز پس ازساده‌کردن به صورت

$$AB = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{BC}$$

درمی‌آیدکه درمسئلهٔ‌دوم از قول ابو نصر عراق نقل شده است ومعلوم نیست چرااستاد آن‌رابصورت پیچیده‌ای که‌در متن‌دیده می‌شوددرآورده‌است.

مسائل بیست وچهارم وبیست وپنجم وبیست‌وششم

این سه مسئله با مسئلهٔ بیست وهفتم یکی است. استاد برای هریك ازاین مسائل راه حلی از خود ویا از ابونصرعراق ذکر کرده است. چون این راه حلها مفصل و دستورهایی که برای آنها داده شده پیچیده است و نتیجهٔ آنها یکی است بهترین راه حل را که استاد از خود ذکر کرده است در مسألهٔ بیست و هفتم (خواهدآمد) شرح می‌دهم - این همان راه حلی است که استاد آن را برای ذکر در «قانون مسعودی» ترجیح داده است - دراینجا فقط آوردن صورت مسائل ازروی نسخهٔ « عل » و شمارهٔ صفحاتی که این مسائل در نسخه‌های مختلف آمده اکتفا می کنم.

مسئلهٔ بیست وچهارم - «معرفة وتر المجموع و وترالتفاضل کل واحد منهما بذاته من غیران یحتاج احدهما الی الاخر لی».

یعنی: محاسبهٔ وتر مجموع و وتر تفاضل دو کمان (که وتر هریك ازآنها معلوم باشد) بدون آنکه در محاسبهٔ یکی احتیاج بدیگری باشد (یعنی بدون آنکه در محاسبهٔ وترمجموع به وترتفاضل احتیاج باشد وبرعکس).

استاد راه حلی ازخود برای این مسئله ذکر کرده و دستوری داده که بسیار مفصل است ومی توان آن را پس از ساده کردن به‌صورت زیرنوشت:

$$sin(\frac{\alpha \pm \beta}{۲}) = \sqrt{۱ - cos^{۲}(\frac{\alpha \pm \beta}{۲})}$$

رجوع کنید به ـ عل: ص۳۷ و ۳۸ ـ سوتر A: ص۵۷ و ۵۸ و نیز صفحهٔ ۷۵ ـ چد: ص۹۳ و ۹۴ ـ چم ص۱۴۵ و ۱۴۶.

مسئلهٔ بیست و پنجم ـ «معرفة وتر التفاضل و وتر المجموع کل واحد منهما بذاته لابی نصر عراق فی کتابه الموسوم بالمجسطی الشاهی».

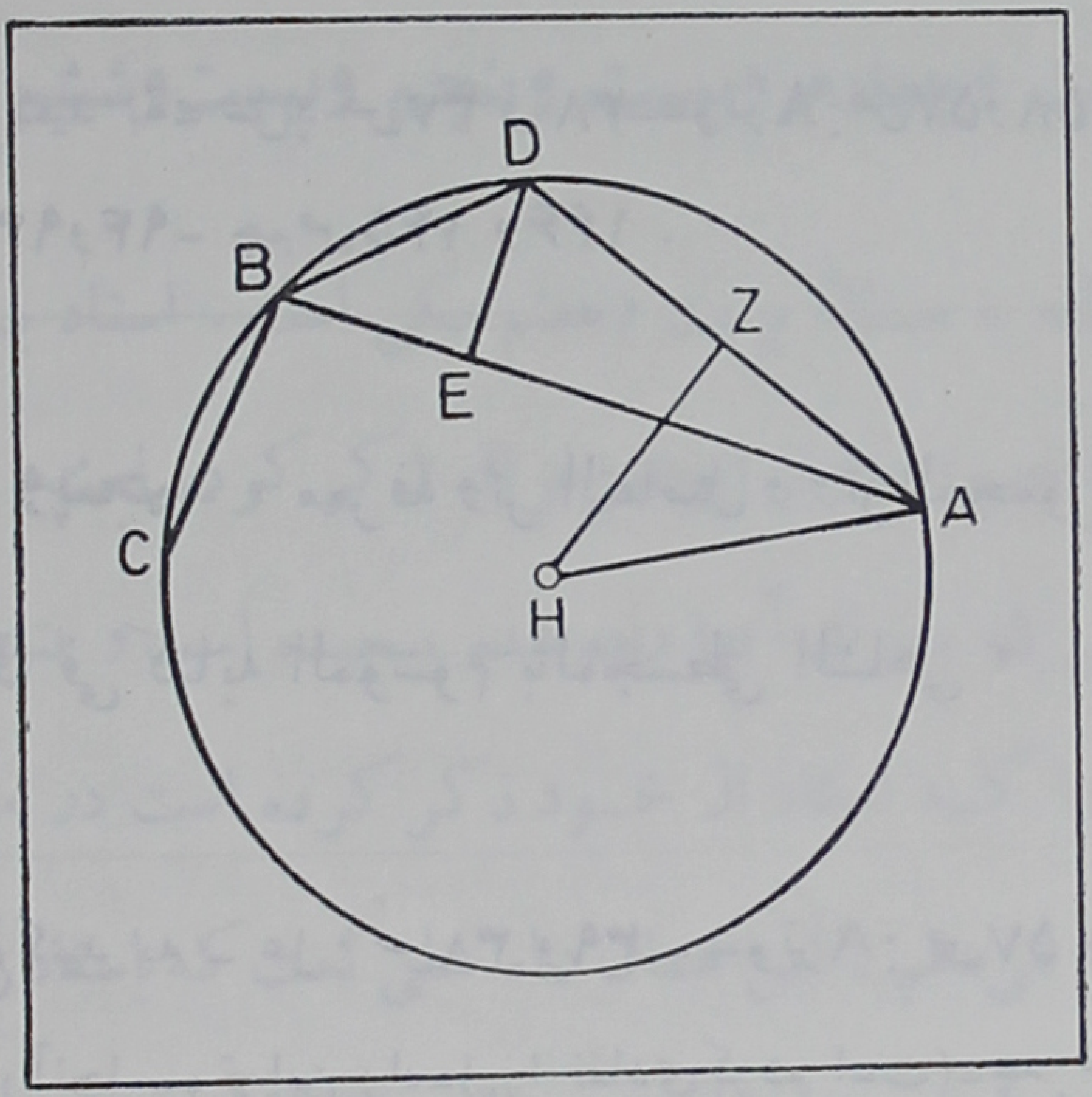
رجوع کنید به ـ عل: ص۳۸ و ۳۹ ـ سوتر A: ص۵۷ و نیز صفحات ۷۵ تا ۷۷ (درآنجا سوتر این راه‌حل‌را نقادی کرده است) ـ چد: ص۹۶ تا ۹۸ ـ چم: ص۱۴۹ تا ۱۵۲.

مسئلهٔ بیست وششم ـ «معرفة وتر التفاضل و وتر المجموع کل واحد منهما بذاته بطریق لی شبیه بالذی تقدم لابی نصر منصور بن علی بن عراق».

رجوع کنید به ـ عل: ص ۳۹ ـ سوتر A: ص۶۰ و نیز صفحهٔ ۷۷ ـ چد: ص۹۴ و ۹۵ ـ چم: ص۱۴۷ و ۱۴۸.

مسئلهٔ بیست وهفتم(۱) ـ محاسبهٔ وتر مجموع و وتر تفاضل(۲).

(این مسئله با مسائل بیست وچهارم و بیست وپنجم و بیست وششم یکی است) هر دو کمان از دایرهٔ به قطر معلوم که وترهاشان معلوم باشد می‌توان وتر مجموع و وتر تفاضلشان را حساب کرد.



(شکل ۸۳)

راه حل از استاد[۳] **ـ** فرض می کنیم که وترهای دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{BD}$ معلوم و قطر دایره نیز معلوم باشد. AB را که وتر مجموع دو کمان است رسم می کنیم وسپس کمان $\widehat{DBC}$ را مساوی با کمان $\widehat{AD}$ جدا می کنیم. واضح است که وتر BC مساوی با وتر تفاضل دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{BD}$ است. می گوییم AB و BC (برحسب AD و BD) معلوم است.

برهان ـ از مرکز دایره که آن را H می‌نامیم عمود HZ را بر وتر AD و از نقطهٔ D (که وسط کمان $\widehat{ADC}$ است) عمود DE را بر AB فرود می‌آوریم و A را به H وصل می کنیم.

چون زاویهٔ مرکزی AHZ روبه‌روی نصف کمانی است که زاویهٔ محاطی DBE نیز روبه‌روی آن است پس این دوزاویه متساویند. بنا بر این دومثلث قائم‌الزاویهٔ AHZ و DBE متشابهند و داریم:

$$\frac{AZ}{AH} = \frac{DE}{BD} \qquad (1)$$

بنابراین DE معلوم است (زیرا $\frac{AD}{۲} = AZ$ و AH و BD معلوم است)

وچون $\overline{BD}^۲ = \overline{DE}^۲ + \overline{BE}^۲$ بنابراین BE نیزمعلوم است.

از طرف دیگر $\overline{AD}^۲ = \overline{AE}^۲ + \overline{DE}^۲$ پس AE نیز به دست می‌آید.

بنابراین AB که مساوی با AE + BE است نیز معلوم است . اما عمود DE خط شکستهٔ ABC را نصف می کند (قضیهٔ اول) و BC = AE − BE پس BC نیز معلوم می‌باشد .

دستور (۴) **-** (عبارت عربی این دستور را می‌توان به‌صورت زیر بیان و ترجمه کرد) .

اگر کمان بزرگتر $\widehat{AD}$ را α و کمان کوچکتر $\widehat{BD}$ را β و وتر AB را a و وتر BD را b وشعاع دایره را r بنامیم:

$$DE = \frac{ab}{۲r}$$ (این مقدار از روی تناسب (۱) به‌دست می‌آید) و

$$AB = \text{وتر}\ (\alpha + \beta) = \sqrt{a^۲ - \left(\frac{ab}{۲r}\right)^۲} + \sqrt{b^۲ - \left(\frac{ab}{۲r}\right)^۲}$$

$$BC = \text{وتر}\ (\alpha - \beta) = \sqrt{a^۲ - \left(\frac{ab}{۲r}\right)^۲} - \sqrt{b^۲ - \left(\frac{ab}{۲r}\right)^۲}$$

***

تبصرهٔ ۱ - در پایان این مسئله در نسخهٔ «عل» عبارتی آمده است که چون در آن نسخه غلط کتابتی داشته **سوتر** مفهوم آن را در نیافته و در پایان ترجمهٔ آلمانی آن علامت (؟) قرار داده است. آن عبارت (پس از تصحیح لازم) این است:

« وقد استبان ان لوتر المجموع ووتر التفاضل اشتراکا فی الاسم وذلك ان وتر **دب** وتر تفاضل مابین قوسی **اد** و **اب** و هو بعینه اعنی **دب** وتر مجموع قوسی **اد** و **اجب** فلذلك یسهل معرفة احدهما بالطرق التی سنحت وسیسنح منهما علم الآخر بذلك الطریق».

همین عبارت با اندك اختلاف (و با غلطهای کتابتی) در نسخه های چاپی (چد: ص۹۴- چم: ص۱۴۶) در دنبال راه حل دیگری از مسئلهٔ تعیین وتر تفاضل دو کمان آمده است . و آقای سعید الدمرداش آن عبارت را در نسخهٔ «چم» به صورت غلط به چاپ رسانیده ومثل بسیاری از مواضع دیگر چاپ خود نه به غلطهای آن توجه کرده و نه به مفهوم آن.

مفهوم عبارت مذکور با مراجعه به کتاب «قانون مسعودی» (چاپ حیدرآباد جلد اول صفحات ۲۸۲ و ۲۸۳) روشن می‌شود . (رجوع کنید به تبصرهٔ دوم که خواهد آمد) .

مقصود استاد این است که : چنانکه در شکل دیده می‌شود :

وتر $DB = (\widehat{AB} - \widehat{AD})$

و ازطرف دیگر : وتر $DB = (\widehat{ACB} + \widehat{AD})$

پس وتر DB را درعین حال هم می‌توان وتر تفاضل دو کمان AB و AD دانست (که دریك سر مشترك کنند ویکی از آنها قسمتی است ازدیگری) وهم وتر مجموع دو کمان $\widehat{ACB}$ و $\widehat{AD}$ (که دریك سر مشترك کنند ونقطهٔ مشترك دیگری ندارند) . بنابراین اگر مثلا وتر مجموع را با استفاده از دستور این مسئله به دست آوردیم می‌توان وتر تفاضل را بااستفاده ازمسائل بیست ودوم و بیست وسوم حساب کرد .

تبصرهٔ ۲- استاد در کتاب «قانون مسعودی» (جلداول صفحات ۲۸۲و۲۸۳) پس از آنکه دستور محاسبهٔ وتر تفاضل و وتر مجموع دو کمان راکه وترهاشان معلوم است بیان کرده است (رجوع کنید به بیرونی نامه: صفحات ۳۲۱ تا ۳۲۵) این دستور را اساس حل کردن همهٔ مسائل دیگر مربوط به محاسبهٔ وترها دانسته و نوشته است:

> «و جمیع ما ذکرنا یدور علی هذا الاخیر اعنی وتری المجموع و التفاضل، فان وترتتمة القوس وترالی نصف الدائره هوفضل ما بین تلك القوس المعلومة الوترو بین نصف الدایره وتر مجموعهما، و وتر الضعف هو وتر مجموع قوسین متساویتین معلومتی الوتر، و وترالنصف هو وترفضل ما بین قوسین معلوم وتر احداهما و یساوی وتر الاخری».

یعنی همه مسائل مربوط به محاسبهٔ اوتار را که قبلا در کتاب «قانون مسعودی» ذکر شده می‌توان با استفاده از دستور محاسبهٔ [وتر $(\alpha+\beta)$] و [وتر $(\beta-\alpha)$] حل کرد. زیرا وتر مکمل کمانی که وتر آن معلوم باشد از دستور محاسبهٔ [وتر $(180-\alpha)$] به دست می‌آید و وتر کمان 2α از روی دستور محاسبهٔ وتر کمان $(\alpha+\alpha)$ حساب می‌شود. و وتر کمان $\frac{\alpha}{2}$ از دستور محاسبهٔ وتر کمان $(\alpha-\frac{\alpha}{2})$ به دست می‌آید که درآن وتر کمان α معلوم وتر کمان $\frac{\alpha}{2}$ مجهول است.

استاد پس ازمطالب فوق در کتاب «قانون مسعودی» عباراتی نوشته که مؤید توضیحی است که در تبصرهٔ۱ ذکر کردم وآن عبارات این است.

« ثم ان الوتر الواحد یکون لقوس هی بعینها فضل ما بین قوسین یشترکان علی نقطة المبدأ وتنبعثان عنها الی جهة واحدة حتی تکون احدا هما بعض الاخری وتکون ایضاً تلك القوس بعینها مجموع احدی تینك القوسین ، واخری تنبعث عن نقطة المبدأ فی جهة اخری ، فاذن الوتر الواحد یکون لقوس التفاضل من جهة ولقوس المجموع من اخری ، فرجع لذلك الی اصل واحد» .

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ بیست‌وهفتم:

(۱)- عل: ص ۳۹ و ۴۰- سوتر A : ص ۶۱ و نیز ص ۷۷- چد: ص ۹۶ (هشت سطر اول) - چم: ص ۱۴۹ .

(۲)- عنوان این مسئله درنسخهٔ «عل» چنین است : « معرفة وتر المجموع و وتر التفاضل **لی** فی علل زیج حبش» - عنوان کامل کتابی که استاد در اینجا به‌آن اشاره کرده این است : « تکمیل زیج حبش بالعلل و تهذیب اعماله من الزلل» (رجوع کنید به بیرونی نامه: ص ۷۲ شمارهٔ **۲/۵۲**).

(۳)- چنانکه در یادداشت شمارهٔ (۲) دیده می‌شود استاد این راه حل را از خود دانسته است .

(۴)- عبارت عربی این دستور این است: نضرب الوتر الاقصر (b) فی نصف الوتر الاطول $\left(\frac{ab}{۲}\right)$ ونقسم المبلغ علی نصف القطر $\left(\frac{ab}{۲r}\right)$ فیخرج العمود $\left(DE = \frac{ab}{۲r}\right)$ ونسقط مضروب العمود فی نفسه من کل واحد من مضروبی الوترین کل واحد علی حده فی نفسه ونأخذ جذر البقیتین

$$\left[\sqrt{b^۲ - \left(\frac{ab}{۲r}\right)^۲} \quad و \quad \sqrt{a^۲ - \left(\frac{ab}{۲r}\right)^۲}\right]$$

فان جمعاً اجتمع وتر مجموع القوسین و ان اخذ فضل ما بینهما کان مساویا لوتر فضل ما بینهما».

(۵)- با استفاده ازنسبتهای مثلثاتی می‌توان این دستور را بصورت زیر درآورد:

$$۲r\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{۲}\right)=\sqrt{۴r^{۲}\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}-\frac{۴r^{۲}\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}\times ۴r^{۲}\sin^{۲}\frac{\beta}{۲}}{۴r^{۲}}}$$

$$\pm\sqrt{۴r^{۲}\sin^{۲}\frac{\beta}{۲}-\frac{۴r^{۲}\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}\times ۴r^{۲}\sin^{۲}\frac{\beta}{۲}}{۴r^{۲}}}$$

و یا

$$\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{۲}\right)=\sqrt{\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}\left(۱-\sin^{۲}\frac{\beta}{۲}\right)}\pm\sqrt{\sin^{۲}\frac{\beta}{۲}\left(۱-\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}\right)}$$

$$=\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\beta}{۲}\pm\cos\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}$$

و این همان دستور مثلثاتی مهم و معروف است (ورجوع کنید به سوتر A: ص۷۷)

مقدمهٔ مسائل بیست وهشتم و بیست ونهم

(پیش ازمسائل بیست و هشتم و بیست‌ونهم عبارت زیر در نسخهٔ «عل» آمده است):

و یمکن استخراج امهات الاوتار بهذه الخاصیة علی مثال استخراجنا لها فی علل زیج حبش وانا احکیها ها هنا فان الموضع لایق به

یعنی: « با استفاده از خاصیت خط شکستهٔ محاط در دایره می‌توان وترهای اصلی دایره را حساب کرد، همان گونه که بعضی از آنها را در کتاب «فی علل زیج

حبش» استخراج کرده‌ایم. ودراینجا آنها را ذکر می کنیم زیرا جای مناسب برای ذکر آنها همین‌جا است.»

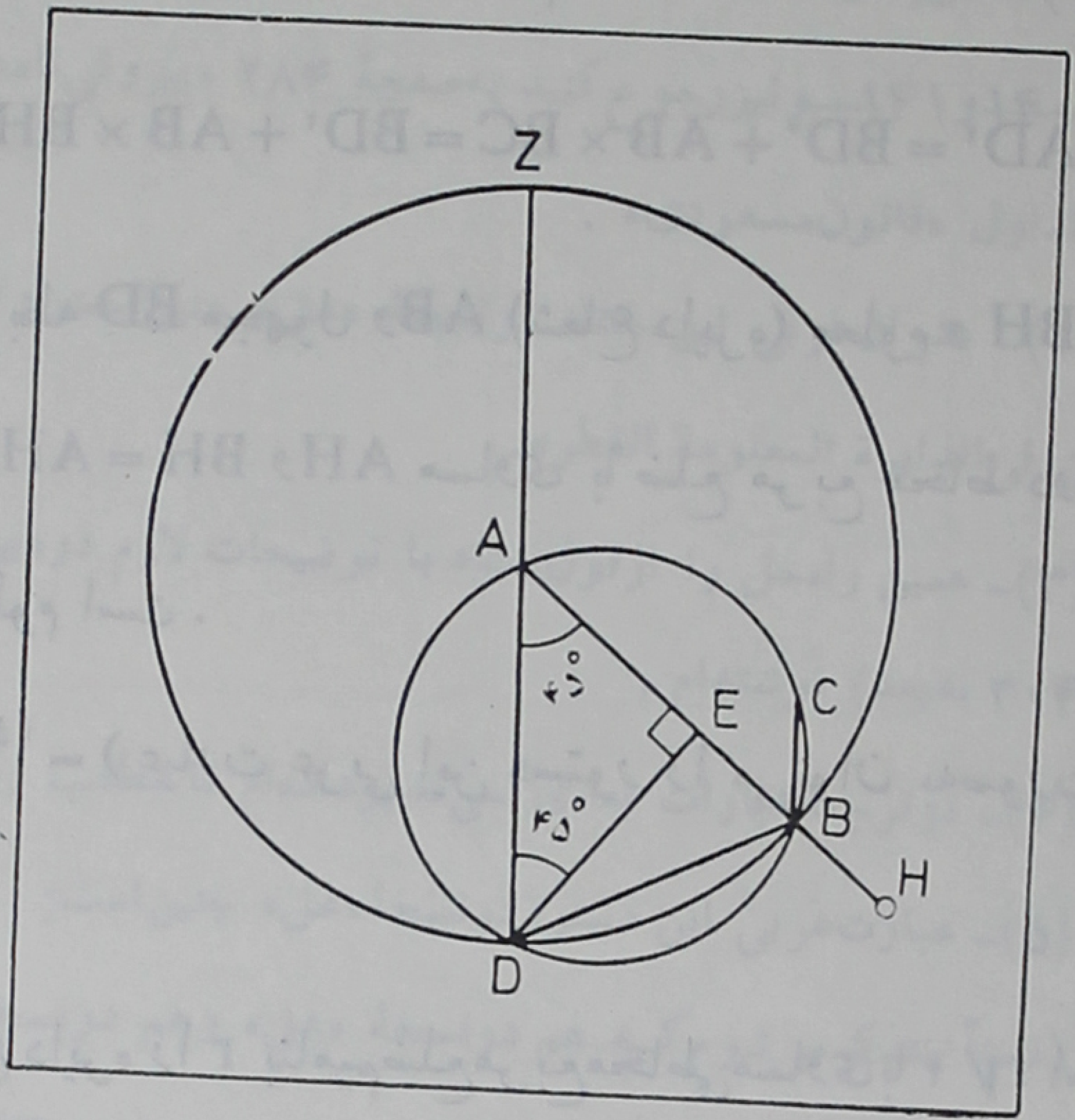
توضیح- مقصود از وترهای اصلی دایره (امهات اوتار) وترهای روبرو به کمانهای ۱۲۰ درجه (= ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی = وتر الثلث) و۹۰ درجه (وتر الربع) و ۷۲ درجه (وتر الخمس) و ۶۰ درجه (وتر السدس) و۴۵ درجه (وتر الثمن) و۳۶درجه (وتر العشر) است که استاد دستورمحاسبهٔ همهٔ آنها را درباب اول‌مقالهٔ سوم کتاب «قانون مسعودی» (جلداول ـ صفحات ۲۷۱ تا ۲۸۰) بااستدلال بیان کرده است (رجوع کنید به «بیرونی‌نامه» صفحات ۲۷۹ تا ۳۰۶) در کتاب «استخراج‌الاوتار» (نسخهٔ«عل») استاد پس ازآنکه قضایای مربوط به‌محاسبهٔ وترها را ذکر کرده نوشته است که وترهای اصلی دایره را می‌توان بااستفاده ازخاصیت خط شکستهٔ محاط دردایره به دست‌آورد. وبه عنوان مثال‌محاسبهٔ وترهای روبه‌رو به کمانهای ۴۵ درجه و۳۶ درجه را از کتاب «فی‌علل‌زیج‌حبش» تألیف خود نقل کرده است.

درباره‌ٔ وترهای اصلی دیگر وچگونگی محاسبهٔ آنها استاد در کتاب «قانون مسعودی» توضیح‌لازم وکافی داده است (رجوع کنیدبه «بیرونی نامه» صفحهٔ ۳۲۵ شمارهٔ ۶/۳۹).

مسئلهٔ بیست و هشتم (۱)**- محاسبهٔ وتر یك هشتم دایره**(۲) (= ضلع هشت‌ضلعی منتظم محاطی).

فرض می کنیم که در دایره‌ای که قطر آن معلوم است کمان $\overset{\frown}{BD}$ یك هشتم محیط دایره باشد. وتر DB را که وتر یك‌هشتم دایره (یعنی ضلع هشت ضلعی

منتظم محاطی) است رسم می کنیم و می گوییم می‌توان DB را برحسب قطر حساب کرد.



(شکل ۸۴)

راه حل (۳) ـ مرکز دایرهٔ معلوم را A می‌نامیم وقطر DAZ وشعاع AB را رسم کرده از نقطهٔ D عمود DE را بر AB فرود می‌آوریم ودایرهٔ محیطی مثلث ADB را رسم می کنیم وروی آن کمان $\widehat{DBC}$ را مساوی با کمان $\widehat{DA}$ جدا و B را به C وصل می کنیم (۴). چون کمان $\widehat{DB}$ از دایرهٔ بزرگتر بنا به‌فرض یك هشتم دایره است پس زاویهٔ DAB مساوی با ۴۵ درجه است وچون زاویهٔ E قائمه است پس زاویهٔ ADE نیز ۴۵ درجه و مثلث AED متساوی الساقین است. پس AE و DE هر کدام مساوی با نصف ضلع مربع محاط در دایرهٔ بزرگتر است. اکنون AB را امتداد می‌دهیم وروی آن EH را مساوی با AE جدا می کنیم. واضح است

که $BH = BC$ زیرا عمود DE هم خط شکستهٔ ABC را نصف می کند (بنا به قضیهٔ اول) و هم پاره خط راست ABH را و داریم:

$$\overline{AD}^{2} = \overline{BD}^{2} + AB \times BC = \overline{BD}^{2} + AB \times BH$$

در این رابطه BD مجهول و AB (شعاع دایره) معلوم و BH نیز معلوم است (زیرا $BH = AH - AB$ و AH مساوی با ضلع مربع محاط در دایرهٔ (C) است) پس BD نیز معلوم است.

دستور(۵) - (عبارت عربی این دستور را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه و ترجمه کرد)

اگر شعاع دایره را r بنامیم ضلع مربع محاطی مساوی با $r\sqrt{2}$ است و داریم:

$$BD = \text{وتر یک هشتم دایره} = \sqrt{r^{2} - r(r\sqrt{2} - r)}$$

که البته می‌توان آن را به‌صورت ساده زیر درآورد:

$$\text{ضلع هشت ضلعی منتظم محاطی} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

تبصره- استاد در پایان این راه‌حل نوشته است: «چه این مسئله را از این راه حل کنیم و چه آن را از روی دستور محاسبهٔ وتر نصف کمانی که وتر آن معلوم است حل کنیم نتیجه یکسان است (در واقع وتر یک چهارم دایره معلوم است و می‌توان وتر یک هشتم دایره را از روی آن به‌دست آورد.)

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ بیست‌وهشتم:

(۱)- عل: ص ۴۰ و ۴۱- سوتر A : ص۶۲ ونیز ص۷۷ -چد: ص۹۰ -چم: ص ۱۴۰ و ۱۴۱- ونیزرجوع کنید به صفحهٔ ۲۸۴ «بیرونی‌نامه» وصفحهٔ ۲۷۲ جلداول «قانون‌مسعودی» .

(۲)- عنوان عربی این‌مسئله درنسخهٔ «عل» چنین‌است : «استخراج وترالثمن فی‌الدایرة المعلومة القطر».

(۳)- همین راه‌حل را ازقول‌استاد با توضیحات لازم در«بیرونی‌نامه» (صفحهٔ ۳۰۴ به‌بعد) نوشته‌ام .

(۴)- درترجمهٔ‌عبارات بعدی‌کمی‌تغییرداده‌ام تا مطلب روشنترشود.

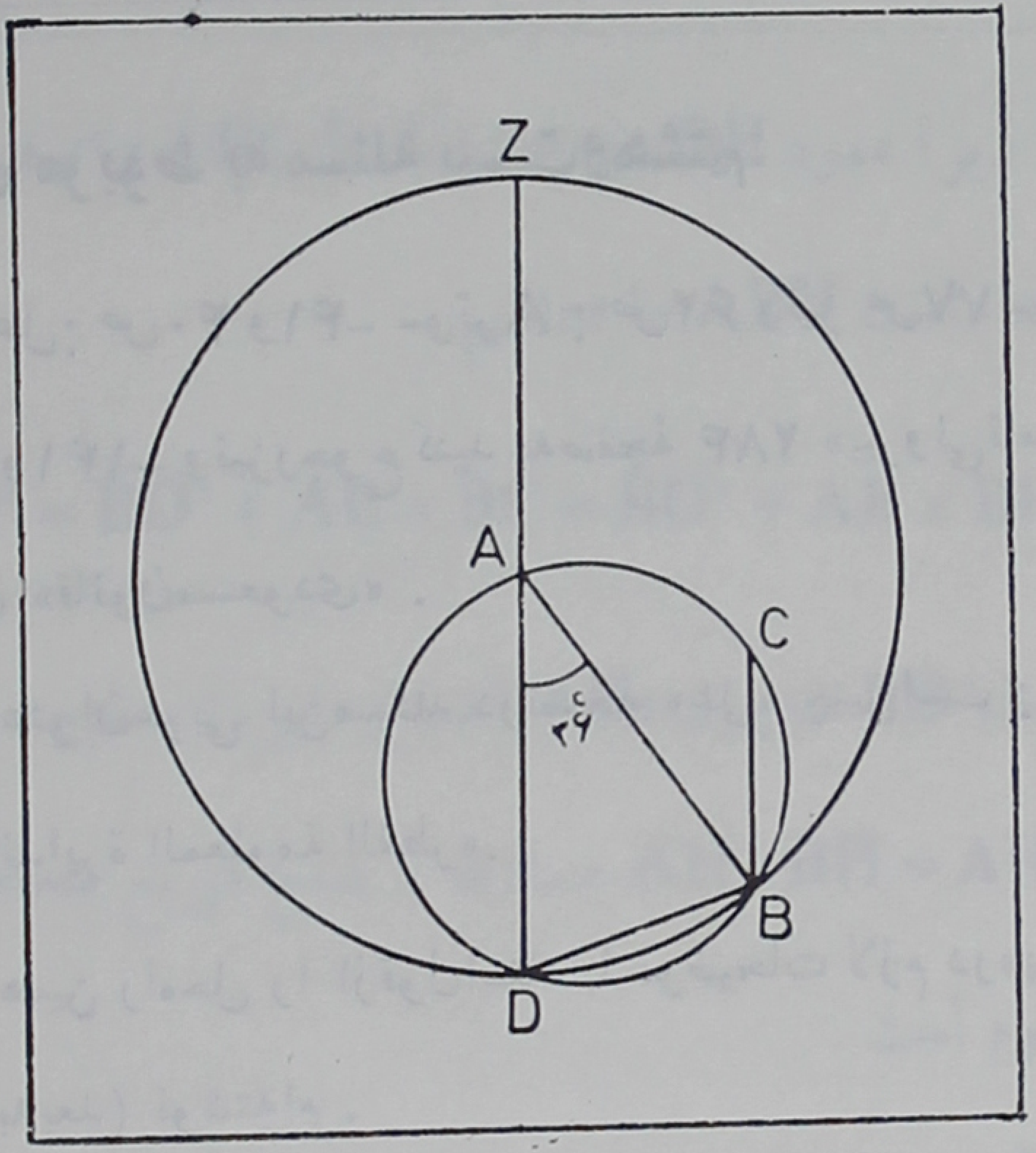
(۵)- عبارت‌عربی این دستوردرنسخهٔ«عل» چنین‌است:

(ضمناً متذکرمی‌شوم‌که هم درنسخهٔ «عل» وهم درنسخه‌های چاپی استخراج الاوتار و هم درکتاب قانون مسعودی (ج۱ص ۲۷۲ سطرآخر) به‌جای «وبین‌وترالربع» به‌غلط نوشته شده است «وبین**ضعف** وترالربع»):

«حسابه : ان نلقی نصف القطرمن (ضعف؟) وترالربع‌ونضرب الباقی فی‌نصف القطر و نسقط المبلغ من مضروب نصف القطر فی‌نفسه و نوجد جذرالباقی فیکون وترالثمن» .

مسئلهٔ بیست و نهم (۱) **ـ محاسبهٔ وتر یکدهم دایره** (۲) (= ضلع ده ضلعی منتظم محاطی) .

فرض می کنیم که BD وتریکدهم دایره باشد . می گوییم BD (برحسب قطر دایره) معلوم است .



(شکل ۸۵)

راه حل (۳) – مرکز دایره را A نامیده قطر DAZ را رسم و A را به B وصل می کنیم و دایرهٔ محیطی مثلث ADB را نیز رسم کرده از روی آن کمان $\widehat{DBC}$ را مساوی با کمان $\widehat{AD}$ جدا و B را به C وصل می کنیم.

زاویهٔ DAB در دایرهٔ بزرگتر (BDZ) زاویهٔ مرکزی و روبه‌روی کمان یکدهم آن دایره (یعنی مساوی با ۳۶ درجه) است. اما همان زاویهٔ DAB در دایرهٔ کوچکتر (DAB) محاطی است پس کمان $\widehat{DB}$ از دایرهٔ کوچکتر یك پنجم آن دایره (یعنی مساوی با ۷۲ درجه) است. وچون دو پاره خط AB و AD (شعاعهای دایرهٔ بزرگتر) با هم مساوی هستند پس دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{ABC}$ (از دایرهٔ کوچکتر) هر کدام دو پنجم از دایرهٔ کوچکتر هستند. اما کمان $\widehat{DCB}$ را مساوی با کمان $\widehat{AD}$ جدا کردیم، بنابراین کمان $\widehat{DBC}$ دو پنجم دایرهٔ کوچکتر است و چون کمان DB یك پنجم دایره است بنابراین دو کمان $\widehat{DB}$ و $\widehat{BC}$ متساویند.

حال گوییم خط شکستهٔ ABC در دایـرهٔ کوچکتر محاط است و بنا به قضیهٔ دوم داریم:

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + AB \times BC = \overline{BD}^2 + AD \times BD$$

بنا براین خط شکستهٔ ADB را می‌توان مانند پاره خط راستی دانست که در نقطهٔ D به نسبت ذات وسط وطرفین تقسیم شده است[۴]. قسمت بزرگتر آن AD شعاع دایرهٔ بزرگتر ومعلوم است وقسمت کوچکترش DB است که وتر یک دهم دایرهٔ بزرگتر میباشد . بنا براین DB معلوم است[۵].

دستور[٦] **ـ** (عبارت عربی دستوری را که استاد داده‌است می‌توان به‌صورت زیر خلاصه وترجمه کرد) : اگر شعاع دایره‌را r بنامیم:

$$BD = C_{10} = \text{وتر یکدهم دایره} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} - \frac{r}{2}$$

تبصره ـ البته می‌توان دستورفوق را به‌صورت سادهٔ زیردرآورد:

$$BD = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

استاد درپایان این راه‌حل افزوده است: «واین‌مبنی برشکل یازدهم از مقالهٔ دوم کتاب اصول اقلیدس درتقسیم پـاره خط به نسبت ذات وسط وطرفین است[۷].

وچون یك پنجم دایره مساوی با دوبرابریك دهم آن است ومی‌دانیم که‌وتردوبرابر کمانی را ‌به‌وتر آن معلوم باشد می‌توان‌حساب کرد[۸] بنا براین وتریك پنجم دایره (یعنی ضلع پنج‌ضلعی منتظم محاطی) نیزمعلوم است .

یادداشت‌های مربوط به مسئلهٔ بیست و نهم:

(۱)- عل: ص۴۱- سوتر A: ص۶۲ و نیز ص۷۸- چد: ص۸۵ تا ۸۷- چم: ص۱۳۴ تا ۱۳۶:

(۲)- صورت این مسئله در نسخهٔ «عل» چنین است: «استخراج وتر العشر»

(۳)- خاطرنشان می کنم که محاسبهٔ وتریك دهم و وتریك پنجم دایره را برحسب شعاع دایره با استدلال کامل از روی کتاب «قانون مسعودی» در کتاب «بیرونی نامه» نوشته‌ام و بنابراین در اینجا زیاد به شرح مطالب نخواهم پرداخت (رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحات ۲۸۱ ش ۶/۱۵ و ص ۲۸۵ ش ۶/۲۰ و صفحات ۲۹۸ تا ۳۲۰)

(۴)- زیرا از رابطهٔ $\overline{AD}^{2} = \overline{BD}^{2} + AD \times BD$ حاصل می‌شود:

$$\frac{AD + BD}{AD} = \frac{AD}{BD}$$

یعنی پاره‌خط راست AD در نقطهٔ D به‌قسمی تقسیم شده است که قسمت بزرگتر آن یعنی AD واسطهٔ هندسی است بین همهٔ آن یعنی $AD + DB$ و قسمت کوچکترش یعنی BD. و این تعریف تقسیم پاره خط به نسبت ذات‌وسط وطرفین است.

(۵)- مقصود این است که اگر در تساوی $\overline{AD}^{2} = \overline{BD}^{2} + AD \times BD$ مقدار AD را که شعاع دایره است r بنامیم می‌توان $x = BD$ را حساب کرد.

$$(r + x)x = r^{2}$$

و از آنجا:

$$x = BD = \frac{r(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

استاد در دستوری که داده این‌مقداررا به صورت زیرنوشته است:

$$BD = \sqrt{r^{۲} + \frac{r^{۲}}{۴}} - \frac{r}{۲}$$

(۶)- عبارت‌عربی این دستوراین‌است:«وحسابه‌ان یزاد علی‌مضروب نصف القطر فی‌نفسه ربعه و ینقص منه‌ربع (درنسخهٔ «عل» به‌غلط «نصف» نوشته‌شده‌است) القطرفیبقی وترالعشر» .

(۷) ـ شکل یازدهم ازمقالهٔ دوم اصول اقلیدس این است: « تقسیم خط به‌قسمی‌که سطح (یعنی‌حاصل‌ضرب) همهٔ آن‌پاره‌خط دریکی ازدوقسمت مساوی باشد با مربع قسمت باقیمانده» (رجوع کنید به «هیث: سیزده‌مقاله» جلددوم صفحات ۴۰۲ به‌بعد).

(۸)- رجوع کنید به‌مسئلهٔ هفدهم.

مسئلهٔ سی‌ام- در کتابهای «استخراج‌الاوتار» چاپی یك‌مسئلهٔ‌دیگر مربوط به‌محاسبهٔ اوتاردایره‌هست که درنسخهٔ «عل» نیست‌واستادآن‌را با استفاده ازخواص خط‌شکستهٔ محاط در دایره به‌دوطریق‌حل کرده است.

صورت‌آن مسئله این است:

«معرفة‌کل‌واحد من‌وتر ین‌لقوسین متوالیتین‌اذاکانت نسبة احدهما الی الاخرمعلومة و وتر مجموعهما معلوماً»

یعنی: محاسبهٔ هریك از دو وتر(AB و BC)متعلق به‌دو کمان متوالی ($\widehat{AB}$ و $\widehat{BC}$) ازدایرهٔ‌به‌قطرمعلوم که نسبت‌آنها $\left(\frac{AB}{BC}\right)$ معلوم و وترمجموع آن دو کمان (AC) نیزمعلوم‌باشد.

رجوع کنید به ـ چد:ص۱۰۴و۱۰۵ ـ چم: ص۱۵۹تا۱۶۱

بخش پنجم

پایان کتاب استخراج الاوتار

در نسخهٔ «عل» (ص۴۱) آمده است: «ومن هذه الاشکال بعد حصول امهات الاوتار فی الدایرة یمکن استخراج سایرها...». یعنی:

«با استفاده از این قضایا [۱] پس از آنکه وترهای اصلی [۲] (= امهات اوتار) را در دایره به دست آوردیم می‌توانیم وترهای دیگر را به طریقی که در کتاب «مجسطی» به‌کار رفته است حساب کنیم به‌این ترتیب که از روی دستور محاسبهٔ وتر تفاضل دو کمان [۳] می‌توان وتر تفاضل $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{5}$ دایره را به دست آورد. (یعنی با دانستن وتر کمان ۶۰ درجه و وتر کمان ۷۲ درجه می‌توان وتر ۱۲ درجه‌را حساب کرد). و از روی دستور محاسبهٔ وتر نصف یک کمان [۴] می‌توان به وتر ۳ درجه رسید. (یعنی از روی وتر ۱۲ درجه وتر ۶ درجه و از روی آن وتر ۳ درجه‌را حساب کرد) و از روی دستور محاسبهٔ وتر اضعاف یک کمان [۵] و محاسبهٔ وتر مجموع

دو کمان(۶) می‌توان وترهای همهٔ کمانها را سه درجه به سه‌درجه (ابتدا ازو تر سه درجه) به دست آورد.»

«اما در محاسبهٔ وتر یك درجه همه‌عاجز مانده‌اند و همین ناتوانی باعث آن شده است که برای استخراج آن انواع حیله‌ها را به‌کار برند تا آن را به‌تقریب، ونه به‌تحقیق، حساب کنند(۷)».

« پس‌تو، که خدایت تأیید کناد ، دربارهٔ آنچه برایت (دراین کتاب) گرد آورده‌ام نیك بیندیش ودرآن کاوش کن تا ازاین راه به‌چشمه‌های زیر کی‌وتیزبینی برسی وزنگ غفلت از عقل تو زدوده گردد وبه‌آنچه فهم عوام به‌آن نارسا است دست‌یابی ومیان توومن موجبات ملامت ازمیان برود...»

***

این‌بود ترجمهٔ تقریبی عباراتی که‌در پایان نسخهٔ«عل»آمده است. امادرپایان نسخه‌های چاپی کتاب «استخراج‌الاوتار» (چد: ص۲۲۶ـ چم:ص۲۸۶) قسمت اخیر مطالب فوق با دوجملهٔ اضافی به‌شرح زیر دیده می‌شود :

«وقد سلكت فی‌استخراج وترالجزء الواحد فی شرحی‌لعلل‌زیج حبش‌طریقاً آخر.ثم جمعت ذلك الی ما للقدماء والمحدثین‌فی کتاب عملته لحصر الطرق‌السائره فی‌استخراج اوتار الدائره.»

«فاجل‌ایدك‌الله فکرك فیما جمعته لك وتحققه حتی تنفتح به ... »

یادداشتهای مربوط به پایان کتاب «استخراج الاوتار»:

(۱)- مقصود مسائل شانزدهم تا بیست و هفتم است که در صفحات ۲۱۸ تا ۲۵۷ کتاب حاضر آمده است.

(۲)- دربارهٔ وترهای اصلی «رجوع کنید به مقدمهٔ مسائل بیست و هشتم و بیست و نهم (صفحهٔ ۲۵۷ کتاب حاضر)

(۳)- رجوع کنید به مسئلهٔ بیست و هفتم (صفحهٔ ۲۵۱).

(۴) - رجوع کنید به مسئلهٔ هجدهم (صفحهٔ ۲۲۷).

(۵) - رجوع کنید به مسئلهٔ هفدهم (صفحهٔ ۲۲۱).

(۶)- رجوع کنید به مسئلهٔ بیست و هفتم (صفحهٔ ۲۵۱).

(۸)- برای کسب اطلاع از محاسبهٔ تقریبی وتر یک درجه رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحات ۳۶۰ به بعد.

فهرست منابع ومآخذ

به ترتیب الفبایی علائم اختصاری آنها

(اسامی دایرةالمعارفها ولغت‌نامه‌ها که مورد استفاده بوده دراین فهرست نیامده است)

آثارالباقیه

«الآثارالباقیه عن القرون الخالیة» تألیف ابی الریحان ـ محمدبن احمدالبیرونی الخوارزمی» چاپ ادوارد زاخاو، لایپزیك ۱۸۷۸م. با مقدمه‌ای به زبان آلمانی ـ درمنابع اروپایی از این کتاب با عنوان زیر یاد می کنند:

«Chronolgie Orientalischer VÖlker» Von Albiruni.
Herausgegeben von Dr. C. Eduard Sachau.
Leipzig, 1878

استخراج الاوتار (چاپ حیدرآباد)

«استخراج الاوتارفی الدائرة بخواص الخط المنحنی الواقع فیها» تألیف بیرونی. رسالهٔ اول از «رسائل البیرونی»، چاپ حیدرآباد دکن توسط جمعیة دائرةالمعارف عثمانیه سال ۱۳۶۷ ه ق.

استخراج الاوتار (چاپ مصر)

«استخراج الاوتارفی الدائرة بخواص الخط المنحنی الواقع فیها» تألیف بیرونی، چاپ مصر، سال **۱۹۶۵ میلادی**، مشتمل برمتن عربی وشرح ممزوج آن توسط احمد سعیدالدمرداش به زبان عربی (در **۳۱۰** صفحه).

افراد المقال فی امر الاظلال

رسالهٔ دوم از «رسائل البیرونی» چاپ حیدرآباد دکن سال ۱۳۶۷ه ق.

الفهرست

تألیف ابن ندیم، چاپ فلوگل: جلد اول، لایپزیک **۱۸۷۱** م

ایسیس (مجلهٔ)

ISIS: Official Quaterly Journal of the History of Science Society»

بروکلمان G ـ بروکلمان S

BROCKELMANN, Carl: «Geschichte der Arabischen Litteratur»

از چاپ دوم (۱۹۴۹ - ۱۹۴۳ م) جلدهای اول ودوم کتاب فوق با عنوانهای «بروکلمان G_1» و «بروکلمان G_2» وازمتممهای آن باعنوانهای «بروکلمان S_1» و «بروکلمان S_2» نام برده‌ام.

بوآلو O

BOILOT, D. J. : «L'oeuvre d'al - Biruni : essai bibliographique» (Mélange de l' Institut Dominicaine d' e'tudes orientales du Caire , vol. 2, 1955, pp. 161-25. Corrigenda et addenda, vol. 3, 1956, pp.391-396)

بیرونی‌نامه

رجوع کنید به «قربانی: بیرونی‌نامه» درهمین فهرست.

تاریخ‌الحکماء

تألیف جمال‌الدین قفطی: چاپ لیپرت، لایپزیك ۱۹۰۳ م.

تحریر اقلیدس

«تحریر اقلیدس فی‌علم‌الهندسة» توسط خواجه‌نصیرالدین طوسی، چاپ سنگی، تهران ۱۲۹۸ ه‍ ق.

ترجمهٔ فارسی الفهرست

توسط آقای م. تجدد، تهران ۱۳۴۳ ه‍ ش.

ترجمهٔ فارسی تاریخ‌الحکماء

«تاریخ‌الحکماء» تألیف قفطی، ترجمهٔ فارسی ازقرن یازدهم هجری -

مقابله، تصحیح، حواشی و مقدمه به‌کوشش خانم دکتربهین دارائی، تهران ۱۳۴۷ هـ ش .

حل المسائل هندسه

تألیف حسن صفاری وابوالقاسم قربانی در دو جلد چاپ تهران (علی‌اکبرعلمی) - بارها به چاپ رسیده‌است .

رسائل ابن سنان

«رسائل ابن سنان، للعلامة ابراهیم بن سنان بن ثابت بن قرة ...» مشتمل بر هفت رسالة زیر: الاسطرلاب - التحلیل والترکیب - حرکات الشمس - رسم القطوع - المساحة - الهندسة والنجوم.

این کتاب درسال ۱۳۶۷ هـ ق . مطابق با۱۹۴۸ میلادی در حیدرآباد کن به چاپ رسیده است.

سارتن I

SARTON, Georges: «Introduction to the History of Science.» vol. 1, 1950, voI II and III (each in 2 Parts), 1953, Baltimore

سوتر A

SUTER,H: «Das Buch der Auffindung der Sehnen in Kreise von Abul - Raihan muh. el - Biruni» (Bibliotheca Mathematica, III Folge, 11 Band, 1910-1911, pp. 11-78)

این مقاله مشتمل بر ترجمهٔ آلمانی متن کتاب «جمع الطرق السائره فی استخراج الاوتار الدائره» تألیف بیرونی (از صفحهٔ ۱۱ تا صفحهٔ ٦٤ مقاله) وشرح وتفسیر آن است (ازصفحهٔ ٦٤ تاصفحهٔ ۷۸ مقاله) . این ترجمه وشرح بسیاراستادانه انجام گرفته است .

سوتر M

SUTER, H.: «Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke». (Abhandlungen zur Geschichte der mathe matischen Wissenschaften.. , Hefte 10, Leipzig, 1900).

قانون مسعودی

«کتاب القانون المسعودی»، تألیف بیرونی، چاپ حیدرآباد دکن، ۱۹۵۴ ـ ۱۹۵٦ میلادی در سه جزء. مجموعاً دارای ۱٤۸۷ صفحه به اضافهٔ ۵۹ صفحه فهرست .

قربانی: بیرونی‌نامه

قربانی، ابوالقاسم: «بیرونی‌نامه ـ تحقیق در آثار ریاضی استاد ابوریحان بیرونی» شمارهٔ ۱۰۷ ازسلسله انتشارات انجمن آثارملی ـ تهران ۱۳۵۳ هـ ش .

قربانی: دوریاضیدان ایرانی

قربانی، ابوالقاسم: «دو ریاضیدان ایرانی وشمه‌ای دربارهٔ عددهـای

متحاب» از انتشارات مرکز تحقیقات علمی و تاریخی مدرسهٔ عالی دختران، ایران، تهران دیماه ۱۳۴۷ هـ ش.

این کتاب مشتمل بر شرح واحوال و آثار کمال‌الدین حسن فارسی و محمدباقریزدی ومختصری دربارهٔ عددهای متحاب است.

قربانی: ریاضیدانان ایرانی

قربانی. ابوالقاسم: «ریاضیدانان ایرانی ـ ازخوارزمی تا ابن‌سینا». نشریهٔ شمارهٔ ۱٤ مدرسه عالی دختران ایران، تهران ۱۳۵۰ خورشیدی ـ این کتاب مشتمل بر شرح احوال و آثار بیست و پنج نفر از ریاضی‌دانان ایرانی است.

قربانی: مقاله «ابوالحسن بامشاد قاینی»

مشتمل برشرح احوال و آثار ابوالحسن قاینی. مجلهٔ یکان شمارهٔ هشتم دورهٔ ششم ـ خرداد و تیر ۱۳۵۱

کاژری H

CAJORI, F. : «A History of Mathematics», New York,1919.

نه مقالهٔ هندسه

تألیف حسن صفاری و ابوالقاسم قربانی شامل هندسهٔ مسطحه وهندسهٔ فضائی ومخروطات وحاملها چاپ تهران (علی‌اکبرعلمی) ۱۳۳۲ هـ ش.

هیث E = هیث: سیزده مقالهٔ اقلیدس

HEATH, T. L.: «The Thireen books of Euclid's Elements», 3 vols. New York, 1956

هیث H

HEATH, T. L.: «A History of Greek Mathematics», 2 vols. Oxford 1921

یوشکویچ G

JUSCHKEWITSCH, A.P.: «Geschichte der Mathematik im Mittelalter,» 1964, Leipzig.

فهرست اسامی کتابها و مقالات

آثارالباقیه: ۱-۲-۷۴-۲۶۹

استخراج الاوتار: در بیشتر صفحات

افرادالمقال فی امر الاظلال: ۴-۲۷۰

اصول اقلیدس: ۷۷-۱۱۲-۱۲۹-۱۳۰-
۱۴۲-۱۴۳-۱۴۴-۲۴۱

الاصول الهندسیة: ۶۷-۶۹-۷۲-۱۵۹-۱۶۲

الردعلی من اشتغل بفضول الهندسه: ۶۲

الدوایر المماسة: ۶۸

السیرة الفلسفیه: ۶۲

الفهرست: ۶۸-۱۶۲-۲۷۰

الکافی فی الحساب ۲۰۶

المجسطی: ۱۳۵

المجسطی الشاهی: ۲۴۴-۲۵۱

ایسیس (مجلهٔ): ۳-۲۷۰

بروکلمان: ۷۶-۹۶-۲۷۰

بوآلو O: ۲-۲۷۱

بیرونی نامه: ۴-۶۹-۷۴-۸۱-۸۵-۹۰-
۱۰۴-۱۰۷-۱۰۹-۱۳۱-۱۴۰-۱۶۲-
۱۷۴-۱۸۷-۲۰۳-۲۱۲-۲۱۳-۲۱۷-
۲۲۰-۲۲۱-۲۲۵-۲۲۷-۲۲۹-۲۵۵-
۲۵۶-۲۵۸-۲۶۱-۲۶۴-۲۷۱

تاریخ الحکماء: ۶۲

تحریر اقلیدس: ۱۱۴-۲۷۱

ترجمهٔ فارسی الفهرست: ۶۲-۶۸-۷۶-۱۶۲-
۲۷۱

ترجمهٔ فارسی تاریخ الحکماء: ۶۲-۲۷۱

تکمیل زیج حبش بالعلل... ۶-۷-۱۰-۱۰۴-
۱۰۷-۲۵۶ و نیز رجوع کنید به زیج حبش.

تنقیح المناظر: ۹۶

جمع الطرق السائره فی معرفة اوتار الدایره:
۱-۳-۹-۱۰
حل المسائل هندسه: ۱۶۲-۱۶۷-۱۷۳-
۱۸۰-۲۷۲
دایرة المعارف اسلام: ۵۶
دایرة المعارف بریتانیکا: ۹۶
دیوپترا: ۱۹۶
رسائل ابن سنان: ۵-۲۷۲
زیج حبش: ۶-۷-۱۰-۱۰۴-۱۰۷-۲۵۶
سارتن I: ۹۶-۲۷۲
سوتر A : ۳-۶۸-۶۹-۷۴-۷۶-۷۹-۸۱-
۸۳-۸۴-۸۵-۸۶-۸۸-۹۰-۹۲-۹۳-۹۴
۹۵-۹۹-۱۰۰-۱۰۷-۱۲۱-۱۲۶-۱۲۹
۱۳۰-۱۳۱-۱۳۳-۱۳۵-۱۳۷-۱۵۵-
۱۶۲-۱۶۷-۱۶۸-۱۷۳-۱۷۷-۱۸۰-
۱۸۷-۱۹۵-۱۹۶-۲۰۳-۲۰۷-۲۱۱-
۲۱۳-۲۱۴-۲۱۶-۲۱۷-۲۲۰-۲۲۱-
۲۲۴-۲۲۹-۲۳۲-۲۳۴-۲۳۷-۲۴۰-
۲۴۲-۲۴۴-۲۴۸-۲۵۱-۲۵۶-۲۵۷-
۲۶۱-۲۶۴-۲۷۲
سوتر M: ۷۶-۹۶-۲۷۳
فی الاصول الهندسیة: ۶۷-۶۹-۷۲
فی دلالة الاثار العلویة علی الاحداث السفلیة:
۲۱۴
فی المسائل المفیده و الجوابات السدیدة :
۱۰۰-۱۰۴-۲۱۳
فی علل زیج حبش: ۲۵۷-۲۵۸-و نیز رجوع
کنید به زیج حبش
قانون مسعودی : ۶۴-۶۵-۶۶-۹۰-
۱۳۱-۱۴۰-۲۵۴-۲۵۵-۲۵۸-۲۶۱-
۲۶۴-۲۷۳
قربانی: دو ریاضی‌دان ایرانی: ۹۶-۲۷۳
قربانی: ریاضیدانان ایرانی: ۷۰-۸۱-۸۹
۱۴۷-۱۶۲-۲۰۷-۲۷۴
قربانی: مقالهٔ «ابو الحسن بن بامشاد قاینی»:
۱۳۹-۲۷۴
کاژری H : ۲۰۳
کتاب الدوائر: ۶۷-۶۹-۷۰-۷۲-۷۴-
۷۶
کتاب الدوائر المماسة: ۶۸
کتاب المجسطی: ۱۳۵
کتاب المناظر: ۹۶
کتاب تحصیل الراحة بتصحیح المساحة: ۱۰۹
کنز الحساب: ۲۰۷
لغت نامهٔ دهخدا: ۹۶
مأخوذات: ۶۹
متریکا: ۱۸۷
مسائل هندسه: ۷۰
مفتاح الحساب: ۲۰۷

مقاله فی‌ان لوازم‌تجزیءالمقادیر... : ۴

مقالة فی طریق‌التحلیل و التقطیع: ۴-۲۱۲

مقالةفی المقادیر المنطقةوالصم: ۷۶

نه مقالۀهندسه: ۱۳۲-۱۶۳-۱۶۷-۱۷۳-۱۷۴

هیث E = هیث: سیزده مقاله: ۷۷-۱۱۴-۱۲۹-۲۷۴

هیث H : ۱۶۲-۱۸۷-۱۹۶-۲۷۵

یوشکویچG: ۲۰۳-۲۷۵

فهرست نامها

آپولونیوس: ۷۴
آذرخور ابن استادجشنس ۷۲-۷۴-۹۰-۹۲
ابراهیم بن سنان بن ثابت: ۴-۵-۶
ابن الندیم: ۶۸.
ابن هیثم ← ابوعلی بصری.
ابوالجود محمد بن لیث: ۱۶۰.
ابوالحسن آذرخور ← آذرخور ابن استادجشنس
ابوالحسن بصری: ۱۴۰
ابوالحسن بن بامشاد قاینی: ۱۳۷-۱۴۵-۱۴۶
ابوالحسن ثابت (ابن قرة): ۵-۶-۱۵۹
ابوجعفر خازن (محمد بن حسین خراسانی): ۱۴۶-۱۴۷.
ابوسعید سجزی (احمد بن محمد بن عبد الجلیل): ۸۰-۸۱-۸۳-۸۴-۱۱۴-۱۱۵-۱۱۷-۱۲۳-۱۲۶-۱۶۰.
ابوسعید محمد بن علی ضریر جرجانی: ۶۹-۷۰-۷۸-۷۹.
ابوعبدالله الشنی (محمد بن احمد): ۸۹-۹۰-۹۲-۹۳-۱۲۶-۱۲۸-۱۲۹-۱۳۰-۱۵۵-۱۹۵-۱۹۶-۱۹۷-۲۰۳
ابوعلی بصری (حسن بن حسین) = ابن هیثم: ۹۴-۹۵-۹۶-۱۱۴-۱۱۵-۱۱۷.
ابوعلی حبوبی: ۸۴-۸۵-۸۶.
ابونصر جعدی ← ابونصر عراق.
ابونصر عراق (منصور بن علی بن عراق): ۸۷-۸۸-۹۳-۹۴-۱۱۸-۱۲۱-۱۲۳-۱۵۳-۱۵۴-۲۴۳-۲۴۵-۲۴۹-۲۵۰-۲۵۱.
احمد سعید الدمرداش: ۵-۶۶-۲۴۵.
ارشمیدس: ۶۴-۶۷-۶۸-۶۹-۷۰-۷۲-۷۴-۷۵-۷۶-۱۸۲-۱۸۵-۱۸۷-۱۸۹-۱۹۵-۱۹۶.
استاد: مقصود از استاد در این کتاب استاد ابوریحان بیرونی است که نامش در بیشتر صفحات آمده است.

استانبول: ۲
ایرن اسکندرانی: ۱۸۷–۱۹۶
بانکیپور: ۱–۲–۳
برهما گوپتا: ۲۰۳
بصره: ۹۵
بطلیموس: ۱۳۱
بوآلو: ۲
تجدد: ۶۲
ثابت بن قرة: ۵–۶–۱۵۹
جمعیةدایرةالمعارف العثمانیه: ۳
حیدرآباد دکن: ۲–۳–۴–۵–۷۲–۱۵۵–۲۱۲–۲۵۴
دارائی (خانم دکتر بهین): ۶۲
رازی ← محمدبن زکریای رازی.
ری: ۱۴۷
سارینوس ثیبائی: ۶۷–۶۹–۷۲
سجزی ← ابوسعیدسجزی
سعیدالدمرداش ← احمدسعیدالدمرداش.
سلیمان بن عصمة سمرقندی: ۱۴۰
سوتر: ۳–۸۵–۱۵۵–۱۶۸–۲۵۳
صفاری (محمدحسن): ۱۶۲–۱۶۷–۱۷۳
غیاث الدین جمشید کاشانی: ۲۰۷
قاضی ابوعلی حسن بن حارث حبوبی ← ابو علی حبوبی.
قاهره: ۲–۹۶.
کتابخانهٔ بانکیپور: ۱–۲–۳
کتابخانهٔ لیدن: ۲–۱۳.
کتابخانهٔ ملی پاریس: ۷۶
کتابخانهٔ مرادملا: ۲
کمال الدین فارسی (ابوالحسن): ۹۶
لیدن: ۲–۳–۱۳.
مانالاوس = منلائوس: ۱۵۹–۱۶۰
محقق (دکتر مهدی): ۶۲
محمدبن زکریای رازی: ۵۸–۵۹–۶۰–۶۲
محمدبن صباح: ۲۱۳
مصر: ۵–۶–۷۲–۹۵
منلاوس ← مانالاوس
یوحنابن یوسف: ۷۴–۷۶–۱۱۴–۱۱۵

شماره	فهرست انتشارات انجمن آثار ملی	تاریخ انتشار
۱	فهرست مختصری از آثار و ابنیهٔ تاریخی ایران	شهریورماه ۱۳۰۴
۲	آثار ملی ایران (کنفرانس پرفسور هرتسفلد)	مهرماه ۱۳۰۴
۳	شاهنامه و تاریخ (کنفرانس پرفسور هرتسفلد)	شهریورماه ۱۳۰۵
۴	کشف دولوح تاریخی در همدان (تحقیق پرفسور هرتسفلد ـ ترجمهٔ آقای مجتبی مینوی)	اسفندماه ۱۳۰۵
۵	سه خطابه در بارهٔ آثار ملی و تاریخی ایران (از محمدعلی فروغی و هرتسفلد و هانی‌بال)	مهرماه ۱۳۰۶
۶	کشف الواح تاریخی تخت‌جمشید (نوشتهٔ پروفسور هرتسفلد)	بهمن‌ماه ۱۳۱۲
۷	کنفرانس محمدعلی فروغی راجع بفردوسی	بهمن‌ماه ۱۳۱۳
۸	تحقیق مختصر دراحوال وزندگانی فردوسی (بقلم فاطمه سیاح)	۱۳۱۳
۹	تجلیل ابوعلی‌سینا در پنجمین دورهٔ اجلاسیه یونسکو درفلورانس	اسفندماه ۱۳۲۹
۱۰	رسالهٔ جودیهٔ ابن‌سینا (بتصحیح آقای دکترمحمود نجم‌آبادی)	اسفندماه ۱۳۳۰
۱۱	رسالهٔ‌نبض‌ابن‌سینا (بتصحیح آقای سیدمحمد مشکوةاستاد دانشگاه)	اسفندماه ۱۳۳۰
۱۲	منطق دانشنامهٔ علائی ابن‌سینا (بتصحیح آقایان سید محمد مشکوة و دکتر محمد معین استادان دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۳	طبیعیات دانشنامهٔ علائی‌ابن‌سینا (بتصحیح آقای سید محمد مشکوة)	۱۳۳۱
۱۴	ریاضیات دانشنامهٔ علائی ابن‌سینا (بتصحیح آقای مجتبی مینوی)	۱۳۳۱
۱۵	الهیات دانشنامهٔ علائی ابن‌سینا (بتصحیح آقای دکترمحمد معین)	۱۳۳۱
۱۶	رسالهٔ نفس‌ابن‌سینا (بتصحیح آقای دکترموسی عمیداستاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۷	رساله‌ای درحقیقت وکیفیت سلسلهٔ موجودات (به‌تصحیح آقای دکتر موسی عمید استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۸	ترجمهٔ رسالهٔ سرگذشت‌ابن‌سینا (ازآقای دکتر غلامحسین‌صدیقی)	ـ
۱۹	معراج‌نامهٔ ابن‌سینا (بتصحیح آقای دکتر غلامحسین صدیقی)	ـ
۲۰	رسالهٔ‌تشریح‌اعضاء ابن‌سینا (بتصحیح آقای دکترغلامحسین‌صدیقی)	ـ
۲۱	رسالهٔ قراضهٔ طبیعیات منسوب بابن‌سینا (بتصحیح آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	ـ
۲۲	ظفرنامه منسوب به‌ابن‌سینا (بتصحیح آقای دکترغلامحسین‌صدیقی)	۱۳۴۸
۲۳	رسالهٔ کنوزالمعزمین ابن‌سینا (بتصحیح آقای جلال‌الدین همایی)	۱۳۳۱
۲۴	رسالهٔ معیارالعقول ـ جرثقیل‌ابن‌سینا (بتصحیح آقای جلال‌الدین همایی استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۲۵	رسالهٔ حی‌بن‌یقظان ابن‌سینا با ترجمه و شرح فارسی‌آن از یکی از معاصران ابن‌سینا (به‌تصحیح آقای هانری‌کربن)	۱۳۳۱
۲۶	جشن‌نامهٔ ابن‌سینا (مجلد اول ـ سرگذشت و تألیفات و اشعار و آراء ابن‌سینا) تألیف‌آقای دکتر ذبیح‌الله صفا استاد دانشگاه	۱۳۳۱

شماره	نام کتاب	تاریخ انتشار
۲۷	ترجمهٔ مجلد اول جشن‌نامه بفرانسه (بوسیلهٔ آقای سعیدنفیسی)	۱۳۳۱
۲۸	ترجمهٔ اشارات و تنبیهات (بتصحیح آقای دکتراحسان یارشاطر)	۱۳۳۲
۲۹	پنج رسالهٔ فارسی و عربی‌از ابن‌سینا (بتصحیح آقای دکتراحسان یارشاطر استاد دانشگاه)	۱۳۳۲
۳۰	آثار تاریخی کلات و سرخس (تألیف آقای مهدی بامداد)	بهمن‌ماه ۱۳۳۳
۳۱	جشن‌نامهٔ ابن‌سینا مجلد دوم (حاوی نطقهای فارسی اعضای کنگرهٔ ابن‌سینا)	۱۳۳۴
۳۲	جشن‌نامهٔ ابن‌سینا مجلد سوم (کتاب‌المهرجان لابن‌سینا) حاوی نطقهای عربی اعضای کنگرهٔ ابن‌سینا	۱۳۳۵
۳۳	جشن‌نامهٔ ابن‌سینا مجلد چهارم (شامل خطابه‌های اعضای کنگرهٔ ابن‌سینا بزبانهای آلمانی و انگلیسی و فرانسوی)	۱۳۳۴
۳۴	نبردهای بزرگ نادرشاه (بقلم سرلشکرغلامحسین مقتدر)	۱۳۳۹
۳۵	جبر ومقابلهٔ خیام (به‌تصحیح وتحشیهٔ آقای دکترجلال‌مصطفوی)	۱۳۳۹
۳۶	شاهنامهٔ نادری تألیف مولانا محمدعلی فردوسی ثانی (بتصحیح و تحشیهٔ آقای احمد سهیلی خوانساری)	۱۳۳۹
۳۷	اشترنامهٔ شیخ‌فریدالدین‌عطار (بتصحیح وتحشیهٔ آقای دکتر مهدی محقق)	۱۳۳۹
۳۸	حکیم‌عمرخیام‌بعنوان‌عالم جبر تألیف‌آقای دکترغلامحسین‌مصاحب	۱۳۳۹
۳۹	نادرشاه تألیف آقای دکتر رضازادهٔ شفق استاد دانشگاه	۱۳۳۹
۴۰	درهٔ نادره تألیف میرزا مهدی‌خان (با تصحیح وتحشیهٔ آقای دکتر سید جعفر شهیدی)	۱۳۴۰
۴۱	شرح احوال ونقدو تحلیل‌آثار شیخ فریدالدین عطار تألیف‌آقای فروزانفر استاد دانشگاه	۱۳۴۰
۴۲	خسرونامه تألیف شیخ فریدالدین عطار (به‌تصحیح و اهتمام‌آقای احمد سهیلی خوانساری)	۱۳۴۰
۴۳	نامه‌های طبیب‌نادرشاه‌ترجمهٔ‌آقای دکترعلی‌اصغرحریری (باهتمام آقای حبیب یغمائی)	۱۳۴۰
۴۴	دیوان غزلیات و قصائد عطار (باهتمام و تصحیح‌آقای دکترتقی تفضلی	۱۳۴۱
۴۵	جهانگشای نادری تألیف میرزا مهدی‌خان استرآبادی (باتصحیح و تعلیقهٔ آقای سید عبدالله انوار)	۱۳۴۱
۴۶	طربخانه (رباعیات حکیم عمر خیام‌نیشابوری) تألیف یار احمدبن حسین رشیدی تبریزی (با مقدمه و تصحیح و تحشیهٔ آقای جلال‌الدین همایی استاد دانشگاه)	۱۳۴۲

شماره	نام کتاب	تاریخ انتشار
۴۷	نادرهٔ ایام ، حکیم عمرخیام ورباعیات او بقلم آقای اسمعیل یکانی	۱۳۴۲
۴۸	اقلیم پارس (آثار باستانی و ابنیهٔ تاریخی فارس) تألیف سید محمدتقی مصطفوی	۱۳۴۳
۴۹	سفارش‌نامهٔ انجمن آثار ملی	اردیبهشت ۱۳۴۴
۵۰	یادنامهٔ شادروان حسین علاء	۱۳۴۴
۵۱	ذخیرهٔ خوارزمشاهی ، تألیف زین‌الدین ابوابراهیم اسمعیل جرجانی سنهٔ ۵۰۴ هجری (به‌اهتمام و تصحیح و تفسیر دکتر محمدحسین‌اعتمادی ــ دکترمحمد شهراد ــ دکترجلال‌مصطفوی) (کتاب نخستین)	۲۵شهریور ۱۳۴۴
۵۲	دیوان صائب ، با حواشی و تصحیح بخط خوداستاد ــ مقدمه و شرح حال بخط و خامهٔ استاد امیری فیروزکوهی	۱۳۴۵
۵۳	عرائس‌الجواهر و نفایس‌الاطایب تألیف ابوالقاسم عبدالله کاشانی بسال ۷۰۰ هجری به‌کوشش آقای ایرج افشار	۱۳۴۵
۵۴	ری باستان (مجلد اول) مباحث جغرافیائی شهری به‌عهدآبادی تألیف دکتر حسین کریمان	۱۳۴۵
۵۵	خیامی‌نامه (جلد اول) تألیف استاد جلال‌الدین‌همائی	آبان ۱۳۴۶
۵۶	فردوسی و شعر او تألیف آقای مجتبی مینوی استاد دانشگاه........	آبان ۱۳۴۶
۵۷	خردنامه تألیف ونگارش ابوالفضل یوسف‌بن‌علی مستوفی بکوشش آقای عبدالعلی ادیب برومند	فروردین ۱۳۴۷
۵۸	فرهنگ واژه‌های‌فارسی در زبان عربی تألیف‌آقای سید محمدعلی امام شوشتری	تیرماه ۱۳۴۷
۵۹	کتابشناسی فردوسی . فهرست آثار وتحقیقات دربارهٔ فردوسی و شاهنامه ، تدوین آقای ایرج افشار	مرداد ۱۳۴۷
۶۰	روزبهان‌نامه بکوشش آقای محمدتقی دانش‌پژوه	اسفند ۱۳۴۷
۶۱	کشف‌الابیات فردوسی (جلداول) بکوشش دکترمحمد دبیرسیاقی	اردیبهشت ۱۳۴۸
۶۲	زندگی و مرگ پهلوانان در شاهنامه نگارش دکتر محمد علی اسلامی ندوشن	خرداد ۱۳۴۸
۶۳	آثار باستانی‌کاشان و نطنز تألیف آقای حسن نراقی	مهر ۱۳۴۸
۶۴	بزرگان شیراز تألیف‌آقای رحمت‌الله مهراز	آبان ۱۳۴۸
۶۵	آثار شهرهای باستانی سواحل و جزایر خلیج‌فارس ودریای عمان تألیف‌آقای احمد اقتداری	آذر ۱۳۴۸
۶۶	تاریخ بناکتی بکوشش دکتر جعفرشعار	دی ۱۳۴۸
۶۷	عهد اردشیر برگرداننده‌بفارسی سید محمد علی امام شوشتری	دی ۱۳۴۸
۶۸	یادگارهای یزد (جلداول) تألیف‌آقای ایرج‌افشار	بهمن ۱۳۴۸

شماره	نام کتاب	تاریخ انتشار
۶۹	ری‌باستان (مجلد دوم) تألیف‌آقای دکترحسین کریمان	خرداد ۱۳۴۹
۷۰	ازآستارا تا استارباد (جلد اول بخش‌اول) آثار و بناهای‌تاریخی گیلان بیه‌پس ، تألیف دکتر منوچهر ستوده	تیر ۱۳۴۹
۷۱	یادنامهٔ فردوسی،حاوی‌مقالات وچکامه‌ها به‌مناسبت‌تجدیدآرامگاه حکیم ابوالقاسم فردوسی	آبان ۱۳۴۹
۷۲	فردوسی و شاهنامه او باهتمام آقای حبیب یغمائی	آذر ۱۳۴۹
۷۳	فیلسوف‌ری‐ محمدبن‌زکریای رازی‌تألیف‌آقای دکترمهدی‌محقق	آذر ۱۳۴۹
۷۴	سرزمین قزوین تألیف‌آقای دکتر پرویز ورجاوند	آذر ۱۳۴۹
۷۵	یادنامهٔ شادروان سید حسن تقی‌زاده به‌اهتمام حبیب یغمائی	بهمن ۱۳۴۹
۷۶	ذخیرهٔ خوارزمشاهی تألیف زین‌الدین ابوابراهیم‌اسمعیل‌جرجانی، سنهٔ۵۰۴هجری به‌اهتمام وتفسیر وتصحیح دکترجلال مصطفوی ـ (کتاب دوم)	بهمن ۱۳۴۹
۷۷	نظری اجمالی به‌تاریخ‌آذربایجان وآثار باستانی وجمعیت‌شناسی آن تألیف‌آقای دکتر محمد جواد مشکور	بهمن ۱۳۴۹
۷۸	تاریخچهٔ ساختمانهای ارگ سلطنتی تهران وراهنمای‌کاخ‌گلستان نوشتهٔ‌آقای یحیی ذکاء	فروردین ۱۳۵۰
۷۹	کشف‌الابیات شاهنامهٔ فردوسی جلد دوم ـ بکوشش دکتر محمد دبیر سیاقی	خرداد ۱۳۵۰
۸۰	آثار باستانی و تاریخی لرستان ـ جلد نخست ـ تألیف آقای حمید ایزدپناه	تیر ۱۳۵۰
۸۱	در دربار شاهنشاه ایران ـ تألیف ا . کمپفرآلمانی‐ ترجمهٔ‌آقای کیکاووس جهانداری	مرداد ۱۳۵۰
۸۲	نگاهی به شاهنامه ، تألیف‌آقای پروفسور فضل‌الله رضا	شهریور ۱۳۵۰
۸۳	مونس‌الاحرار فی‌دقایق‌الاشعار (جلد۲) تألیف محمدبن‌بدرجاجرمی بسال۷۴۱هجری با تحشیه وتفسیرآقای میرصالح طبیبی	شهریور ۱۳۵۰
۸۴	مقدمه‌ای برشناخت اسناد تاریخی تألیف سرهنگ دکترجهانگیر قائم مقامی	شهریور ۱۳۵۰
۸۵	فرهنگ شاهنامه تألیف دکتر رضازاده شفق	مهر ۱۳۵۰
۸۶	دانش و خرد فردوسی فراهم‌آوردهٔ دکترمحمود شفیعی	مهر ۱۳۵۰
۸۷	وقفنامهٔ ربع رشیدی(چاپ‌عکسی) از روی‌نسخهٔ مورخ به‌سال۷۰۹ قمری زیرنظرآقایان مجتبی مینوی و ایرج افشار	اسفند ۱۳۵۰
۸۸	ذیل جامع‌التواریخ رشیدی‌تألیف‌حافظ ابرو مورخ دوران‌تیموری با مقدمه و تعلیقات آقای دکتر خانبابا بیانی	اسفند ۱۳۵۰

شماره	نام کتاب	تاریخ انتشار
۸۹	از استارا تا استاراباد (مجلد دوم) آثار وبناهای تاریخی گیلان بیه‌پیش تألیف دکتر منوچهر ستوده	خرداد ۱۳۵۱
۹۰	نصیحة‌الملوك تألیف امام محمد غزالی با مقدمه وتصحیح وتحشیهٔ استاد جلال‌الدین همایی	آذرماه ۱۳۵۱
۹۱	آثار باستانی آذربایجان (جلد اول آثار تاریخی شهرستان تبریز) تألیف آقای عبدالعلی کارنگ	آذرماه ۱۳۵۱
۹۲	مجموعه انتشارات قدیم انجمن	دی‌ماه ۱۳۵۱
۹۳	مجموعهٔ مقالات فروغی دربارهٔ شاهنامه و فردوسی به‌اهتمام آقای حبیب یغمائی	بهمن‌ماه ۱۳۵۱
۹۴	داستان داستانها (داستان رستم و اسفندیار) تنظیم متن وشرح و توضیح به‌کوشش دکتر محمدعلی اسلامی ندوشن	اسفندماه ۱۳۵۱
۹۵	فردوس در تاریخ شوشتر تألیف علاءالملك حسینی شوشتری (قرن ۱۱هجری) با مقدمه و تصحیح و تعلیق آقای جلال محدث	خرداد ۱۳۵۲
۹۶	تاریخ تبریز تا پایان قرن نهم هجری تألیف دکتر محمد جواد مشکور	تیرماه ۱۳۵۲
۹۷	ذخیرهٔ خوارزمشاهی تألیف زین‌الدین ابوابراهیم اسماعیل جرجانی سنهٔ ۵۰۴هجری باهتمام و تفسیر و تصحیح دکتر جلال مصطفوی جلد سوم	شهریور ۱۳۵۲
۹۸	ترجمهٔ یك فصل از آثارالباقیهٔ ابوریحان بیرونی بخامهٔ علیقلی میرزا اعتضادالسلطنه و ملاعلی محمد اصفهانی بکوشش آقای اکبر داناسرشت با مقدمه والحاقاتی از ایشان	آبان ۱۳۵۲
۹۹	مادها و بنیانگذاری نخستین شاهنشاهی در غرب فلات ایران تألیف آقای جلیل ضیاءپور	بهمن ۱۳۵۲
۱۰۰	سیر فرهنگ ایران دربریتانیا یا تاریخ دویست‌سالهٔ مطالعات ایرانی تألیف آقای دکتر ابوالقاسم طاهری	اسفند ۱۳۵۲
۱۰۱	آثار ملی اصفهان تألیف آقای ابوالقاسم رفیعی مهرآبادی	اسفند ۱۳۵۲
۱۰۲	سیراف (بندر طاهری) تألیف آقای غلامرضا معصومی	اسفند ۱۳۵۲
۱۰۳	فرهنگ فارسی به پهلوی تألیف آقای دکتر بهرام فره‌وشی استاد دانشگاه تهران	فروردین ۱۳۵۳
۱۰۴	کتابشناسی کتابهای خطی تألیف شادروان دکتر مهدی بیانی استاد فقید دانشگاه به‌کوشش آقای حسین محبوبی اردکانی	خرداد ۱۳۵۳
۱۰۵	تاریخ بافت قدیمی شیراز ، تألیف آقای کرامت‌الله افسر	مرداد ۱۳۵۳
۱۰۶	فرار از مدرسه ، در بارهٔ زندگی و اندیشهٔ ابوحامد غزالی ، تألیف دکتر عبدالحسین زرین‌کوب	مرداد ۱۳۵۳
۱۰۷	بیرونی‌نامه ، پژوهش و نگارش آقای ابوالقاسم قربانی	مهر ۱۳۵۳

شماره	نام کتاب	تاریخ انتشار
۱۰۸	جامع جعفری ، تاریخ یزد در دوران نادری و زندیه و عصر سلطنت فتحعلی‌شاه ، تألیف محمد جعفر بن محمد حسین نائینی متخلص به «طرب» ، به‌کوشش آقای ایرج افشار	آبان ۱۳۵۳
۱۰۹	کتاب‌التفهیم لاوائل صناعة التنجیم ، تألیف ابوریحان محمد بن احمد بیرونی خوارزمی ، با تجدید نظر و مقدمهٔ تازه به خامهٔ استاد جلال‌الدین همائی	دی‌ماه ۱۳۵۳
۱۱۰	(دیار شهریاران) آثاروبناهای تاریخی خوزستان جلدنخستین بخش اول ــ تألیف آقای احمد اقتداری	خرداد ۱۳۵۴
۱۱۱	(دیارشهریاران) آثاروبناهای تاریخی خوزستان نخستین جلد بخش دوم ــ تألیف آقای احمد اقتداری	خرداد ۱۳۵۴
۱۱۲	احوال و اقوال‌شیخ ابوالحسن خرقانی بضمیمهٔ (منتخب نورالعلوم) تألیف آن عارف بزرگوار باهتمام استاد مجتبی مینوی	تیرماه ۱۳۵۴
۱۱۳	شرح احوال و آثار و دوبیتی‌های باباطاهرعریان بانضمام شرح وترجمه کلمات قصار وی منصوب به عین‌القضاه همدانی (؟) با اصل و ترجمه کتاب الفتوحات الرّبانیّه‌فی مزج‌الاشارات‌الهمدانیه) به شرح وتفسیرمحمدبن‌ابراهیم مشهوربه خطیب وزیری به‌کوشش دکتر جواد مقصود	شهریور ۱۳۵۴
۱۱۴	کتاب «الغارات» تألیف ابواسحق ابراهیم بن محمد بن سعید ثقفی کوفی اصفهانی باهتمام و تصحیح استاد میرجلال‌الدین محدّث (بخش نخست)	شهریور ۱۳۵۴
۱۱۵	کتاب «الغارات» به شرح مذکور درشمارهٔ ۱۱۴ (بخش دوم)	شهریور ۱۳۵۴
۱۱۶	یادگارهای یزد (جلد دوم) تألیف آقای ایرج افشار	شهریور ۱۳۵۴
۱۱۷	تاریخ روابط بازرگانی‌وسیاسی‌ایران و انگلیس‌ازدوران فرمانروائی مغولان‌تاپایان عهد قاجاریه‌تألیف‌وتدوین آقای‌دکترابوالقاسم طاهری	مهرماه ۱۳۵۴
۱۱۸	از آستارا تا استارباد « مجلد ششم » شامل اسناد تاریخی گرگان بکوشش آقای دکترمسیح ذبیحی ودکترمنوچهرستوده (بخش‌نخست)	مهرماه ۱۳۵۴

شماره	نام کتاب	تاریخ انتشار
۱۱۹	از آستارا تا استارباد «مجلد هفتم» بشرح مذکور در شمارهٔ ۱۱۸ (جلد دوم)	آذرماه ۱۳۵۴
۱۲۰	سفرنامه حکیم ناصرخسرو بکوشش و تصحیح دکتر محمد دبیرسیاقی	بهمن‌ماه ۱۳۵۴
۱۲۱	آثار باستانی خراسان جلد اول شامل آثار و ابنیهٔ تاریخی جام و نیشابور و سبزوار ــ اثر آقای عبدالحمید مولوی	اردیبهشت ۲۵۳۵ شاهنشاهی (۱۳۵۵ خورشیدی)
۱۲۲	تاریخ باستانی ایران بر پایهٔ باستانشناسی تألیف پرفسور هرتسفلد ترجمهٔ علی‌اصغر حکمت استاد ممتاز دانشگاه تهران	اردیبهشت ۲۵۳۵ شاهنشاهی (۱۳۵۵ خورشیدی)
۱۲۳	آثار باستانی و تاریخی لرستان ــ جلد دوم ــ تألیف آقای ایزدپناه	خرداد ۲۵۳۵ شاهنشاهی (۱۳۵۵ خورشیدی)

KASHMIR UNIVERSITY
Iqbal Library
Acc. No 179143

Date........................

Call No..........

Account No..........

J. & K. UNIVERSITY LIBRARY

This book should be returned on or before the last stamped above. An overdue charges of 6 nP. will be levied for each day. The book is kept beyond that day.

IQBAL LIBRARY
The University of Kashmir
Acc. No. [redacted]
Author [redacted]
Title [redacted]

Date.............................

Call No..........

Account No..........

J. & K. UNIVERSITY LIBRARY

This book should be returned on or before the last stamped above. An overdue charges of 6 nP. will be levied for each day. The book is kept beyond that day.

IQBAL LIBRARY
The University of Kashmir
Acc. No. [redacted]
Author [redacted]
Title [redacted]